30　2020年度　文系〔3〕・理系〔3〕　Level B

以下の問に答えよ。

(1)　和が30になる2つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(2)　和が30になる3つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(3)　和が30になる3つの自然数からなる組合せの総数を求めよ。

31　2018年度　文系〔3〕・理系〔3〕　Level B

さいころを3回ふって，1回目に出た目の数をa，2回目と3回目に出た目の数の和をbとし，2次方程式

$$x^2-ax+b=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

を考える。以下の問に答えよ。

(1)　$(*)$が$x=1$を解にもつ確率を求めよ。

(2)　$(*)$が整数を解にもつとする。このとき$(*)$の解は共に正の整数であり，また少なくとも1つの解は3以下であることを示せ。

(3)　$(*)$が整数を解にもつ確率を求めよ。

32　2017年度　文系〔3〕・理系〔4〕（(4)は理系のみ）　Level C

$\vec{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\vec{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\vec{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$とする。座標空間内の動点Pが原点Oから出発し，正四面体のサイコロ$\left(1,\ 2,\ 3,\ 4\right.$の目がそれぞれ確率$\dfrac{1}{4}$で出る$\left.\right)$をふるごとに，出た目が$k$（$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$）のときは$\vec{v_k}$だけ移動する。すなわち，サイコロを$n$回ふった後の動点Pの位置を$\mathrm{P}_n$として，サイコロを（$n+1$）回目にふって出た目が$k$ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\vec{v_k}$$

である。ただし，$\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$である。以下の問に答えよ。

(1)　点P_2がx軸上にある確率を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$となる確率を求めよ。

(3)　4点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある確率を求めよ。

(4)　nを6以下の自然数とする。$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$となる確率を求めよ。

33　2015年度　文系〔3〕・理系〔5〕　Level C

a，b，cを1以上7以下の自然数とする。次の条件$(*)$を考える。

$(*)$　3辺の長さがa，b，cである三角形と，3辺の長さが$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$である三角形が両方とも存在する。

以下の問に答えよ。

(1)　$a=b>c$であり，かつ条件$(*)$をみたすa，b，cの組の個数を求めよ。

(2)　$a>b>c$であり，かつ条件$(*)$をみたすa，b，cの組の個数を求めよ。

(3)　条件$(*)$をみたすa，b，cの組の個数を求めよ。

$1+(2+3)+(3+5)+(4+5+4)=27$ 通り

よって，求める確率は

$\dfrac{27}{216}=\dfrac{1}{8}$ ……(答)

32 2017年度 文系〔3〕・理系〔4〕（(4)は理系のみ） Level C

$\vec{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\vec{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\vec{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$ とする。座標空間内の動点Pが原点Oから出発し，正四面体のサイコロ$\left(1，2，3，4 \text{ の目がそれぞれ確率 } \dfrac{1}{4} \text{ で出る}\right)$をふるごとに，出た目が k（$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$）のときは $\vec{v_k}$ だけ移動する。すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点Pの位置を P_n として，サイコロを（$n+1$）回目にふって出た目が k ならば

$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\vec{v_k}$

である。ただし，$P_0=O$ である。以下の問に答えよ。

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ。

(2) $\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$ となる確率を求めよ。

(3) 4点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ。

(4) n を6以下の自然数とする。$P_n=O$ となる確率を求めよ。

ポイント (1) $\vec{v_i}+\vec{v_j}$（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$）の y 成分，z 成分がともに0となる場合を考える。
(2) $\vec{v_i}+\vec{v_j}$（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$）のうちの垂直な組を求める。
(3) $\vec{v_i}$（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）はどの3つをとっても同一平面上にないので，余事象を考える。
(4) n 回のうち i（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）の目の出た回数を a_i として，P_n の座標を a_i で表してみる。

解法

(1) $\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{v_i}+\vec{v_j}$（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$）であり，$\vec{v_i}+\vec{v_j}$ の y 成分，z 成分がともに0となるのは

$\vec{v_1}+\vec{v_2}$ または $\vec{v_3}+\vec{v_4}$

であるので，1回目，2回目に出た目が，1と2または3と4のとき，P_2 が x 軸上にある。

全部で目の出方は 4^2 通りあり，1と2が出るのは2通り，3と4が出るのは2通りあるので，P_2 が x 軸上にある確率は

$\dfrac{2+2}{4^2}=\dfrac{1}{4}$ ……(答)

(2) $\vec{v_i}+\vec{v_j}$ ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4$) については

(i) $\vec{v_1}+\vec{v_1}=(2,\ 2,\ 2)$，$\vec{v_2}+\vec{v_2}=(2,\ -2,\ -2)$

$\vec{v_3}+\vec{v_3}=(-2,\ 2,\ -2)$，$\vec{v_4}+\vec{v_4}=(-2,\ -2,\ 2)$

(ii) $\vec{v_1}+\vec{v_2}=(2,\ 0,\ 0)$，$\vec{v_1}+\vec{v_3}=(0,\ 2,\ 0)$，$\vec{v_1}+\vec{v_4}=(0,\ 0,\ 2)$

$\vec{v_2}+\vec{v_3}=(0,\ 0,\ -2)$，$\vec{v_2}+\vec{v_4}=(0,\ -2,\ 0)$，$\vec{v_3}+\vec{v_4}=(-2,\ 0,\ 0)$

の 10 通りあり，このうち垂直である組合せは，(ii)の 6 つのベクトルから平行でない 2 つを選んだ場合であり，平行である組は 3 つあるので

$${}_6C_2-3=12 \text{ 通り}$$

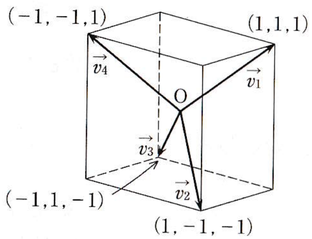
$\vec{v_1}+\vec{v_2}$ と $\vec{v_1}+\vec{v_3}$ の場合は

$\overrightarrow{OP_2}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$，$\overrightarrow{P_2P_4}=\vec{v_1}+\vec{v_3}$　または　$\overrightarrow{OP_2}=\vec{v_1}+\vec{v_3}$，$\overrightarrow{P_2P_4}=\vec{v_1}+\vec{v_2}$

の 2 通りあり，それぞれについて $2\times2=4$ 通りあるので，目の出方は $2\times4=8$ 通りある。他の組合せについても同様であるので，求める確率は

$$\frac{8\times12}{4^4}=\frac{3}{8}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にあることと，3 つのベクトル $\overrightarrow{P_0P_1}$，$\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{P_2P_3}$ が同一平面上にあることは同値である。$\vec{v_i}$ ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$) はどの 3 つをとっても同一平面上にないので，1 回目，2 回目，3 回目に出た目がすべて異なるとき，P_0，P_1，P_2，P_3 は同一平面上になく，それ以外の場合は同一平面上にある。



したがって，求める確率は

$$1-\frac{{}_4P_3}{4^3}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(4) **(理系のみ)**　n 回のうち i ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$) の目の出た回数を a_i (a_i は 0 以上の整数) とすると　$a_1+a_2+a_3+a_4=n$　……①

$$\overrightarrow{OP_n}=a_1\vec{v_1}+a_2\vec{v_2}+a_3\vec{v_3}+a_4\vec{v_4}$$
$$=(a_1+a_2-a_3-a_4,\ a_1-a_2+a_3-a_4,\ a_1-a_2-a_3+a_4)$$

よって，$P_n=O$ となるとき

$a_1+a_2-a_3-a_4=0$　……②

$a_1-a_2+a_3-a_4=0$　……③

$a_1-a_2-a_3+a_4=0$　……④

②＋③ より　$2a_1-2a_4=0$　$a_1=a_4$

②－③ より　$2a_2-2a_3=0$　$a_2=a_3$

③＋④ より　$2a_1-2a_2=0$　$a_1=a_2$

よって　$a_1=a_2=a_3=a_4$

①より　$4a_1=n$

a_1 は 0 以上の整数，n は 6 以下の自然数であるので，これをみたすのは

$$a_1=a_2=a_3=a_4=1,\ n=4$$

このとき，1，2，3，4 の目が 1 回ずつ出るので，確率は　$\dfrac{4!}{4^4}=\dfrac{3}{32}$

ゆえに，$P_n=O$ となる確率は

$$\left.\begin{array}{l} n=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6 \text{ のとき } 0 \\ n=4 \text{ のとき } \dfrac{3}{32} \end{array}\right\}\cdots\cdots(\text{答})$$

33 2015年度 文系〔3〕・理系〔5〕 Level C

a, b, c を1以上7以下の自然数とする。次の条件(＊)を考える。

(＊) 3辺の長さが a, b, c である三角形と，3辺の長さが $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の問に答えよ。

(1) $a=b>c$ であり，かつ条件(＊)をみたす a, b, c の組の個数を求めよ。

(2) $a>b>c$ であり，かつ条件(＊)をみたす a, b, c の組の個数を求めよ。

(3) 条件(＊)をみたす a, b, c の組の個数を求めよ。

ポイント (1)・(2) 一般に，$p\geqq q\geqq r>0$ のとき，p, q, r を3辺の長さとする三角形が存在するための条件は，$p<q+r$ が成り立つことである。それぞれの場合について，条件をみたす (a, b, c) を具体的に求める。その際，1つの文字の値に着目するとよい。
(3) (1)・(2)を含め，$a\geqq b\geqq c$ で条件をみたす a, b, c の組の個数を求め，a, b, c を入れ換えたものを考慮する。

解法

(1) $a=b>c$ のとき，a, b, c を3辺とする三角形はつねに存在する。

$\frac{1}{c}>\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ であるので，$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ を3辺とする三角形が存在するための条件は

$$\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{c}<\frac{2}{a} \quad a<2c$$

したがって　$c<a<2c$

これをみたす c, a の組は

$(c, a)=(2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (4, 7),$
$(5, 6), (5, 7), (6, 7)$

よって，(＊)をみたす a, b, c の組の個数は　9　……(答)

(2) $a>b>c$ のとき，$\frac{1}{c}>\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ であるので，(＊)をみたすための a, b, c の条件は

$$a<b+c \quad \text{……①} \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad \text{……②}$$

②より　$ab<bc+ac$　$a(b-c)<bc$

$a>b>c$ より，$a\geqq 3$ である。

a の値に着目し，$a>b>c$，①，②をみたす b, c の組を求めると

$a=3$ のとき　$b=2$, $c=1$ なので，①をみたさない。

$a=4$ のとき　$4>b>c$, $4<b+c$ をみたすのは

$(b, c)=(3, 2)$

のみで，これは，$4(b-c)<bc$ をみたす。

$a=5$ のとき　$5>b>c$, $5<b+c$ をみたすのは

$(b, c)=(4, 3), (4, 2)$

このうち，$5(b-c)<bc$ をみたすのは

$(b, c)=(4, 3)$

$a=6$ のとき　$6>b>c$, $6<b+c$ をみたすのは

$(b, c)=(5, 4), (5, 3), (5, 2), (4, 3)$

このうち，$6(b-c)<bc$ をみたすのは

$(b, c)=(5, 4), (5, 3), (4, 3)$

$a=7$ のとき　$7>b>c$，$7<b+c$ をみたすのは

$(b, c)=(6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (5, 4), (5, 3)$

このうち，$7(b-c)<bc$ をみたすのは

$(b, c)=(6, 5), (6, 4), (5, 4), (5, 3)$

以上より，(＊)をみたす a, b, c の組の個数は

$1+1+3+4=9$　……(答)

(3) (i) $a>b=c$ のとき

$\frac{1}{c}=\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ であるので，$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ を3辺とする三角形はつねに存在する。

a, b, c を3辺とする三角形が存在するための条件は

$a<b+c$　すなわち　$a<2c$

したがって　$c<a<2c$

(1)よりこれをみたす c, a の組は9組あるので，(＊)をみたす a, b, c の組の個数は

9

(ii) $a=b=c$ のとき

a, b, c および $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ を3辺とする三角形は正三角形でありつねに存在する。

したがって，(＊)をみたす a, b, c の組の個数は　7

$a\geqq b\geqq c$ で(＊)をみたす a, b, c の組において，a, b, c を入れ換えても，(＊)をみたすので

3×2×1

(1)の場合　$9\times\frac{3!}{2!}=27$

$\boxed{a=1}$　$b=1$　$c=1$

2 × 1

(2)の場合　$9\times3!=54$

(i)の場合　$9\times\dfrac{3!}{2!}=27$ → A B C $3\times2\times1=3!$

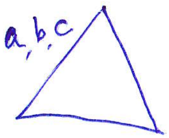
(ii)の場合　$7\times1=7$

$3\times2\times1=3!$

よって，(＊)をみたす a，b，c の組の個数は

$27+54+27+7=115$ ……(答)

a, b, c



34　2007年度　文系〔3〕・理系〔5〕　Level A

次の問に答えよ。

(1)　1，2，3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2)　1 の数字を書いたカードを 3 枚，2 の数字を書いたカードを 3 枚，3 の数字を書いたカードを 3 枚，計 9 枚用意する。この中から無作為に，一度に 3 枚のカードを選んだとき，カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。

ポイント (1)　和が，3，6，9 の場合について求める。
(2)　(1)で求めたそれぞれの組合せについて，取り出し方の場合の数を求める。

解法

(1)　和が 3 となるのは　{1, 1, 1}
和が 6 となるのは　{1, 2, 3}, {2, 2, 2}
和が 9 となるのは　{3, 3, 3}

3 つの数の和は 9 以下なので，求める組合せは

{1, 1, 1}, {1, 2, 3}, {2, 2, 2}, {3, 3, 3} ……(答)

(2)　{1, 1, 1}, {2, 2, 2}, {3, 3, 3} を選ぶのは，それぞれ 1 通り。

{1, 2, 3} を選ぶのは　$3\times3\times3=27$ 通り

9 枚から 3 枚を選ぶ方法は，全部で ${}_9C_3=84$ 通りであるので，求める確率は

$$\frac{3\times1+27}{84}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$$ ……(答)

問　題

$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$とする。座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ（1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ確率$\frac{1}{4}$で出る）をふるごとに，出た目が $k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$のときは$\overrightarrow{v_k}$だけ移動する。すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置をP_nとして，サイコロを$(n+1)$回目にふって出た目が k ならば，$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$である。ただし，$P_0=O$である。以下の問いに答えよ。

(1)　点P_2が x 軸上にある確率を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$となる確率を求めよ。

(3)　4 点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある確率を求めよ。　[2017]

解答例＋映像解説

(1)　正四面体のサイコロを 2 回ふったとき，1 回目，2 回目に出た目を，それぞれ a, b とする。$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$に対して，$P_0=O$から$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$である。

このとき，点P_2が x 軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$のときであり，その確率は$\left(\frac{1}{4}\right)^2\times4=\frac{1}{4}$となる。

(2)　(1)と同様に，点P_2が y 軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$のときであり，その確率は$\frac{1}{4}$である。

また，点P_2が z 軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$のときであり，その確率は$\frac{1}{4}$である。

さらに，$(a,\ b)=(1,\ 1)$では$P_2(2,\ 2,\ 2)$，$(a,\ b)=(2,\ 2)$では$P_2(2,\ -2,\ -2)$，$(a,\ b)=(3,\ 3)$では$P_2(-2,\ 2,\ -2)$，$(a,\ b)=(4,\ 4)$では$P_2(-2,\ -2,\ 2)$となる。

さて，サイコロを 4 回ふったとき，1 回目，2 回目，3 回目，4 回目に出た目を，それぞれ a, b, c, d とすると，$\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_4}=\overrightarrow{v_c}+\overrightarrow{v_d}$となる。

すると，$\overrightarrow{P_2P_4}=\overrightarrow{v_c}+\overrightarrow{v_d}$についても$\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$と同様に考えることができるので，$\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$となるのは，次の場合である。

(a)　$\overrightarrow{P_0P_2}$が x 軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$が y 軸に平行または z 軸に平行なとき

(b)　$\overrightarrow{P_0P_2}$が y 軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$が x 軸に平行または z 軸に平行なとき

(c)　$\overrightarrow{P_0P_2}$が z 軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$が x 軸に平行または y 軸に平行なとき

その確率は，$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$である。

(3)　(2)と同様に設定すると，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}=\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}=\overrightarrow{v_c}$ となる。

これより，4 点 $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ が同一平面上にある条件は，$\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{v_c}$ が同一平面上のベクトルであることになる。

ここで，$\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{v_c}$ が同一平面上にないときを考えると，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$ から異なる 3 個のベクトルを選ぶとして，その確率は $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot 3!}{4^3}=\dfrac{3}{8}$ である。

よって，4 点 $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ が同一平面上にある確率は，$1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$ となる。

コメント

確率に空間ベクトルが融合した記述しにくい問題です。(3)では，余事象を利用して 1 次独立な 3 つのベクトルを選ぶ確率をもとに計算しましたが，場合分けをして直接的に求めても構いません。