

1 次の各 にあてはまる数や式を答えなさい。

(1) 直線 ℓ の方程式を $y = \frac{1}{2}x + 1$ とするとき、点 $(-2, 3)$ を通り ℓ に平行な直線の方程式は ア で、点 $(-2, 3)$ を通り ℓ に垂直な直線の方程式は イ である。

(2) $a = \log_{10} 2$ とするとき、 a を用いて表すと、 $\log_{10} 1024 =$ ウ ,
 $\log_{10} 5 =$ エ である。

(3) ベクトル $\vec{a} = (-2, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, -4, -4)$ に対して、内積は
 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ オ であり、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は カ である。

(4) ある等差数列について、第1項から第3項までの和が6、第4項から第6項までの和が51であることがわかっている。このとき、初項は キ で、公差は ク である。

(5) $a_{n+1} = 5a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $a_1 = 4$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n =$ ケ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と表すことができる。また、この数

列 $\{a_n\}$ に対して $\sum_{k=1}^n a_k$ を計算すると、 コ となる。

2

$\angle B$ が直角の直角三角形 ABC は, $AC = 2$ であるとする. $\theta = \angle A$ とおき, この三角形の面積を S , また $T = AB^2 - BC^2$ とおく. このとき, 次の各問いに答えなさい.

- (1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, S と T の値をそれぞれ求めなさい.
- (2) S と T を, それぞれ θ を用いて表しなさい.
- (3) $\theta = \frac{\pi}{8}$ のとき, S と T の値をそれぞれ求めなさい.
- (4) $S + T$ のとる最大値を求めなさい.

33つの2次関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を

$$f(x) = x^2 + 6x + 2, \quad g(x) = x^2 - 2x + 2, \quad h(x) = -x^2 + 2x + 8$$

とする。このとき、次の各問いに答えなさい。

- (1) 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の座標を求めなさい。
- (2) 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = h(x)$ の交点の座標をすべて求めなさい。
- (3) 2つの放物線 $y = g(x)$ と $y = h(x)$ の交点の座標をすべて求めなさい。
- (4) 2つの放物線 $y = f(x)$ と $y = h(x)$ で囲まれてできる図形の面積を求めなさい。
- (5) xy 平面上で3つの不等式 $y \leq f(x)$, $y \geq g(x)$, $y \leq h(x)$ をすべて満たすような点全体からなる図形の面積を求めなさい。

1

(1) ア

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

イ

$$y = -2x - 1$$

(2) ウ

$$10a$$

エ

$$1 - a$$

(3) オ

$$-12$$

カ

$$\frac{3}{4}\pi \quad (135^\circ \text{も可})$$

(4) キ

$$-3$$

ク

$$5$$

(5) ケ

$$4 \cdot 5^{n-1}$$

コ

$$5^n - 1$$

2

(1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}^2 = \underline{1}$, $T = \sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^2 = \underline{0}$.

(2) $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \theta \cdot 2 \sin \theta = \underline{2 \sin \theta \cos \theta} = \underline{\sin 2\theta}$,
 $T = (2 \cos \theta)^2 - (2 \sin \theta)^2 = \underline{4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta} = \underline{4 \cos 2\theta}$.

(3) $\theta = \frac{\pi}{8}$ のとき, $S = \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

$$T = 4 \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{2\sqrt{2}}.$$

(4) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$ を満たすような鋭角 α を用いて,

$$S + T = \sin 2\theta + 4 \cos 2\theta$$

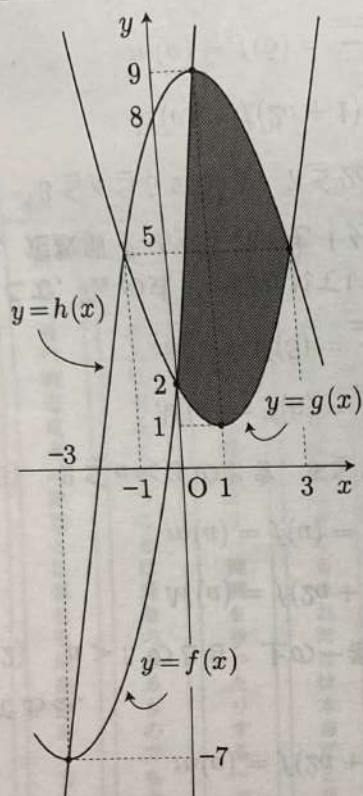
$$= \sqrt{17} \left(\sin 2\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\theta \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \right)$$

$$= \sqrt{17} (\sin 2\theta \cos \alpha + \cos 2\theta \cdot \sin \alpha)$$

$$= \sqrt{17} \sin(2\theta + \alpha)$$

と表すことができる. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < 2\theta < \pi$, ゆえに $\alpha < 2\theta + \alpha < \pi + \alpha$ である. α が鋭角であることにより $2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ となるような θ をとることができて, このとき $\sin(2\theta + \alpha) = 1$ であり $S + T$ は最大値 $\underline{\sqrt{17}}$ をとる.

3



$$f(x) = (x+3)^2 - 7,$$

$$g(x) = (x-1)^2 + 1,$$

$$h(x) = -(x-1)^2 + 9.$$

(1) $f(x) = g(x) \iff x = 0$. $x = 0$ のとき $y = 2$. よって $(0, 2)$.

(2) $f(x) = h(x) \iff x = 1, -3$. $x = 1$ のとき $y = 9$, $x = -3$ のとき $y = -7$. よって $(1, 9), (-3, -7)$.

(3) $g(x) = h(x) \iff x = 3, -1$. $x = 3$ のとき $y = 5$, $x = -1$ のとき $y = 5$. よって $(3, 5), (-1, 5)$.

(4) 左図より $-3 \leq x \leq 1$ のとき $h(x) \geq f(x)$ である. よって求める面積は,

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^1 \{h(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_{-3}^1 (-2x^2 - 4x + 6) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 6x \right]_{-3}^1 \\ &= -\frac{2}{3} [x^3]_{-3}^1 - 2 [x^2]_{-3}^1 + 6 [x]_{-3}^1 \\ &= -\frac{2}{3} \{1 - (-27)\} - 2(1 - 9) + 6\{1 - (-3)\} \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

(5) 求めるものは, 上図の網掛け部の面積である.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx + \int_1^3 \{h(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^1 8x dx + \int_1^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx \\ &= [4x^2]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_1^3 \\ &= 4[x^2]_0^1 - \frac{2}{3} [x^3]_1^3 + 2[x^2]_1^3 + 6[x]_1^3 \\ &= 4(1 - 0) - \frac{2}{3}(27 - 1) + 2(9 - 1) + 6(3 - 1) \\ &= \frac{44}{3}. \end{aligned}$$