

Q1

内積空間における任意のベクトル x と y に対して、

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

が成り立つことを証明しなさい。

Q2

2 点 x, y が与えられた時、

$$\alpha x + \beta y \quad (\alpha, \beta \text{ は任意の実数}) \quad (2)$$

を x, y の線形結合 (linear combination) という。部分空間 M 上から任意の 2 点 x, y を選んだ時、それらの線形結合は必ず M 上の点であること、すなわち $\alpha x + \beta y \in M$ (α, β は任意の実数) となることを示せ。

Q3

n 個の一次独立な実ベクトル $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ から正規直交基底を生成する代表的な手法であるグラムシュミットの直交化法の計算式を、以下の手順で記しなさい。

1. x_1 のノルムを 1 (単位長さ) にしたベクトル ξ_1 を求める。これを正規化 (normalization) という。
2. x_2 を $\text{span}^\perp\{\xi_1\}$ に射影した後、ノルムを 1 に正規化したベクトル ξ_2 を求める。ここで、 $\text{span}^\perp\{\xi_1\}$ の計算には、直交分解 $x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$ を用いる。(ここまでは、 $\|\xi_1\| = \|\xi_2\| = 1$, $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0$ となる正規直交系 $\{\xi_1, \xi_2\}$ ができたことになる。)
3. x_3 を $\text{span}^\perp\{\xi_1, \xi_2\}$ に射影した後、ノルムを 1 に正規化したベクトル ξ_3 を求める。
4. このプロセスを繰り返し、最後に x_n から ξ_n を求めたら終了。正規直交基底 $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ を出力。

Q4

任意の (一次独立とは限らない) ベクトル集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset X$ に対して、グラム行列が半正定値行列であることを示せ。また、「グラム行列が正定値行列であること」と「 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ が一次独立であること」が等価であることを示せ。

Q5

フーリエ級数展開が正規直交展開であることを式を用いて説明しなさい。また、基底ベクトルの正規直交性が演じる役割りについて、記述しなさい。

Q6

$(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ と $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ を内積空間とする。この時、集合

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

を定義する。集合 $X \times Y$ の元 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ に対して、

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{X \times Y} := \langle x_1, x_2 \rangle_X + \langle y_1, y_2 \rangle_Y$$

を定義する。この時、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X \times Y} : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ が内積の公理を満たすことを示せ。

Q7

実対称行列 A に対して、2 次関数 $f(x) := \frac{1}{2}x^T A x$ のヘッセ行列を求めよ。(一般の $n \times n$ 行列で示すこと。どうしても難しい場合は、 2×2 行列の場合でも可とする。)