

第 22 回 図 形 と 式 (3)

【例題一覧】

【例題 1】〈実数条件の数式化〉

実数 x, y が、 $x^2 + y^2 = 1$ をみたしながら変わるとき、点 $P(x + y, xy)$ の軌跡を考える。

(1) 点 P は点 $(3, 4)$ という点をとることがあるか。

(2) 点 P の軌跡を求めよ。

【例題 2】〈線形計画法の応用〉

実数 x, y は $x^2 + xy + y^2 \leq 3$ をみたしている。

(1) $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ とおくと、点 (u, v) の範囲を図示せよ。

(2) $xy - 2x - 2y$ のとる値の範囲を求めよ。

【例題 3】〈逆像法〉

直線 $l: y = 2ax + 1 - a^2$ について以下の問いに答えよ。

(1) a が全実数をとって変化するとき、直線 l の通過する領域に、3 点 $A(1, 0)$, $B(1, 3)$, $C(2, 3)$ が含まれるかどうか調べよ。

(2) a が全実数をとって変化するとき、直線 l の通過する領域を求め、図示せよ。

(3) a が $0 \leq a \leq 1$ の範囲を変化するとき、直線 l の通過する領域に(1)の 3 点 A, B, C が含まれるかどうか調べよ。

(4) a が $0 \leq a \leq 1$ の範囲を変化するとき、直線 l の通過する領域を求め、図示せよ。

【例題 4】〈順像法〉

直線 $l: y = 2ax + 1 - a^2$ について以下の問いに答えよ。

(1) a が $0 \leq a \leq 1$ の範囲を変化するとき、 $x = -1, \frac{1}{2}, 1$ において直線 l が通過する y の範囲を求めよ。

(2) a が $0 \leq a \leq 1$ の範囲を変化するとき、直線 l の通過する領域を求め、図示せよ。

【例題 5】〈正領域・負領域の応用〉

直線 $l: y = ax - a^2 + 1$ と 2 点 $P(1, -1)$, $Q(4, 4)$ がある。直線 l が線分 PQ (両端点を含む) と共有点をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

A問題

- 問題 1
- ☐ 点 $P(a, b)$ が $y = 2x$ 上を動くとき、 $(a + b, ab)$ を座標とする点はどうな曲線を描くか。その方程式を求めよ。
- 問題 2
- ☐ 領域 $xy + x - 1 \leq 0$ を図示せよ。
- 問題 3
- ☐ 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の 2 つの解がいずれも 1 より大きい実数のとき、点 (a, b) はどのような範囲にあるか図示せよ。

B問題

- 問題 4
- ☐ $P(x, y)$ が変数 t を用いて
- $$x = 4 - t, \quad y = 3t - 2$$
- と与えられている。 t が $0 \leq t \leq 1$ を動くとき、点 P の軌跡を求め、図示せよ。
- 問題 5
- ☐ 実数 x, y が $x^2 + y^2 + x + y = 1$ をみたしながら変わるとき、点 $(x + y, xy)$ の描く図形を図示せよ。
- 問題 6
- ☐ $(x - 1)^2 + (y - k)^2 \leq k^2$ をみたす (x, y) がつねに $y \geq k(x - 2)$ をみたすためには、 k はどのような範囲にあることが必要十分か。
- 問題 7
- ☐ 点 (x, y) が $(1, -1)$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円の内部を動くとき、点 $(x - y, -xy)$ の動く範囲を図示せよ。
- 問題 8
- ☐ x, y が $x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \geq 6, 3x + 4y \geq 12, x + 6y \geq 8$ をみたしながら変わるとき、 $S = 2x + y$ を最小にする x, y の値と、 S の最小値を求めよ。
- 問題 9
- ☐ m を 0 以外のどんな実数にとっても放物線 $my = m^2x^2 - 2m^2x + (m + 1)^2$ が決して通らない点の存在する範囲を図示せよ。
- 問題 10
- 平面上に放物線 $C: y = a^2x^2 - (a + 2)x + 5$ と 2 点 $P(4, -3)$, $Q(6, -5)$ がある。ただし a は 0 でない実数の定数である。
- ☐ (1) 直線 PQ と放物線 C がただ 1 つの点を共有するような a の条件を求めよ。
- ☐ (2) 線分 PQ (両端点を含む) と放物線 C がただ 1 つの点を共有するような a の条件を求めよ。
- 問題 11
- ☐ 放物線 $y = 2x^2$ の頂点を O とし、放物線上に 2 点 A, B を $\angle AOB$ が直角になるようにとる。 O から AB への垂線の足の軌跡を求めよ。

C問題

- 問題 12
- ☐ 2 点 $P(x, y)$, $Q(X, Y)$ の間に
- $$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Y = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$
- の関係がある。
- 点 P が不等式 $(4x + 3y - 5)(4x - 3y + 5) > 0$ で表される範囲を動くとき、点 Q の動く範囲を図示せよ。
- 問題 13
- ☐ t が 0 でない実数で変わるとき、
- $$x = t + \frac{1}{t}, \quad y = t^2 + \frac{1}{t^2}$$
- で定まる点 (x, y) の軌跡を求めよ。