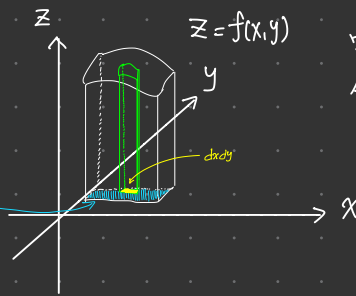


2重積分  $\iint_D f(x,y) dx dy$  の意味



空間内に広がる曲面  $z = f(x,y)$  における領域  $D$  の部分の体積を求めていることに等しい。



問1 Point 与えられた  $z = f(x,y)$  の式を  $z$  について解き 2重積分の形式で表す

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1 \text{ より, } z = -\frac{2}{3}x - \frac{y}{2} + 2 \text{ また領域 } D \text{ を } D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\} \text{ とすれば}$$

$$V = \iint_D \left(-\frac{2}{3}x - \frac{y}{2} + 2\right) dx dy$$

問2 Point 積分の順序を指示通りに  $PD$  の (4) の形で行う (もちろん  $\int dy$  のときは  $x$  は定数扱い  $\int dx$  のときは  $y$  は定数扱い)

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^2 (x^2 - xy) dx \right\} dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^2 dy = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{8}{3} - 2y\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y\right) \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2}y\right) dy = \left[\frac{7}{3}y - \frac{3}{4}y^2\right]_0^1 = \frac{7}{3} - \frac{3}{4} = \frac{28-9}{12} = \frac{19}{12} \end{aligned}$$

問3 Point 例に従って  $PD$  を計算 (もちろん  $\int dy$  のときは  $x$  は定数扱い  $\int dx$  のときは  $y$  は定数扱い)

$$(1) \int_0^2 \left\{ \int_0^1 (2x+y) dx \right\} dy = \int_0^2 \left[ x^2 + xy \right]_0^1 dy = \int_0^2 (1+y) dy = \left[ y + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^2 = 2 + 2 - 0 = 4$$

$$(2) \int_{-2}^1 \left\{ \int_{-1}^3 xy^2 dx \right\} dy = \int_{-2}^1 \left[ \frac{1}{2}x^2y^2 \right]_{-1}^3 dy = \int_{-2}^1 \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)y^2 dy = 4 \left[ \frac{1}{3}y^3 \right]_{-2}^1 = 12$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dx \right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\cos(x+y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(y + \frac{\pi}{2}) - \cos y) dy$$

$\sin(-y) = -\sin(y)$   
 $(\because \text{R: } \cos \theta \rightarrow \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta)$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin y) - \cos y dy = \left[ -\cos y + \sin y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$(4) \int_0^1 \left\{ \int_0^1 xe^{xy} dy \right\} dx = \int_0^1 \left[ e^{xy} \right]_0^1 dx = \int_0^1 (e^x - 1) dx = \left[ e^x - x \right]_0^1 = e - 1 - (1 - 0) = e - 2$$

問4 Point  $\int_{\text{定数}}^{\text{定数}} \left\{ \int_{\text{変数}}^{\text{変数}} f(x,y) dy \right\} dx$  の積分領域が  $\square$  以外の複雑な形でも計算ができる

$$(1) \int_1^2 \left\{ \int_0^x x dy \right\} dx = \int_1^2 \left[ xy \right]_0^x dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[ x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

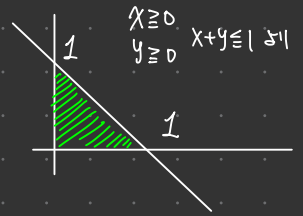
$$(2) \int_{\frac{1}{2}}^2 \left\{ \int_0^{\frac{1}{x}} (x-2y) dy \right\} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[ xy - y^2 \right]_0^{\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[ x + \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^2 = 0$$

$$(3) \int_1^2 \left\{ \int_{y^2}^4 y\sqrt{x} dx \right\} dy = \int_1^2 \left[ \frac{2}{3}y x^{\frac{3}{2}} \right]_{y^2}^4 dy = \frac{2}{3} \int_1^2 (4y\sqrt{64} - y\sqrt{y^6}) dy$$

$$= \frac{2}{3} \int_1^2 (8y - y^4) dy = \frac{2}{3} \left[ 4y^2 - \frac{1}{5}y^5 \right]_1^2 = \frac{2}{3} \left( 16 - \frac{32}{5} - \left( 4 - \frac{1}{5} \right) \right) = \frac{2}{3} \times \frac{29}{5} = \frac{58}{15}$$

$$(4) \int_0^1 \left\{ \int_0^y 2x dx \right\} dy = \int_0^1 \left[ x^2 \right]_0^y dy = \int_0^1 e^{2y} dy = \frac{1}{2} \left[ e^{2y} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

問5 Point  $y$  の範囲を確認し領域  $D$  を不等式で示し問3~4の形式に持っていく



(1)  $x+y \leq 1$  より  $y \leq -x+1$  であるから領域  $D$  は次の不等式で表すことができる  
 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x+1$  したがって...

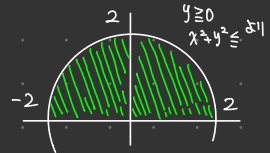
↑  
 片側より

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{-x+1} (x+y) dy \right\} dx = \int_0^1 \left[ xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{-x+1} dx = \int_0^1 (-x+1)x + \frac{1}{2}(-x+1)^2 dx \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2} dx = \frac{1-\frac{1}{2}}{6} (1-0)^3 = \frac{1}{3} \quad (\because \int_{\alpha}^{\beta} ax^2+bx+c dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3) \end{aligned}$$

(2)  $x^2+y^2 \leq 4$  より  $y^2 \leq 4-x^2$  すなわち  $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$  であるから領域  $D$  は次の不等式で示せる

$-2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$  したがって...

↑  
 片側より



$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_{-2}^2 \left\{ \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy \right\} dx = \int_{-2}^2 \left[ \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \frac{1}{2} \times 2 \int_0^2 (4-x^2) dx \\ &= \left[ 4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

問6 Point 解法

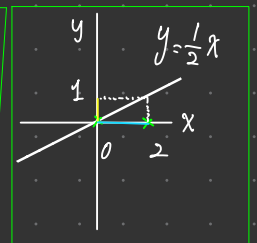
- ① 積分領域を不等式で示す
- ② 文字が含まれている方を  $y=$  (or  $x=$ ) と関数で示す (値域の方)
- ③  $x=$  (or  $y=$ ) で解き直す
- ④ ①の定義域を用いて③に代入して定義域(入力)だった不等式を値域に書き換える
- ⑤ ①の定義域を用いて④の値域に代入して値域(出力)だった不等式を定義域に書き換える

(1) 与式から積分領域は次の不等式で表される。  $0 \leq x \leq 2y$ ,  $0 \leq y \leq 1$

図示すると右のようになります ( $x=2y$  なら  $y = \frac{1}{2}x$  である)

↳  $0 \leq x \leq 2$  (定数)    ↳  $\frac{1}{2}x \leq y \leq 1$  (変数)

$$\text{与式} = \int_0^2 \left\{ \int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y) dy \right\} dx$$

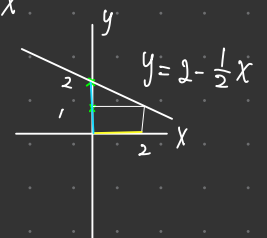


(2) 与式から積分領域は次の不等式で表される。  $0 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 2 - \frac{1}{2}x$

図示すると右のようになります ( $y = 2 - \frac{1}{2}x$  なら  $x = 4 - 2y$  である)

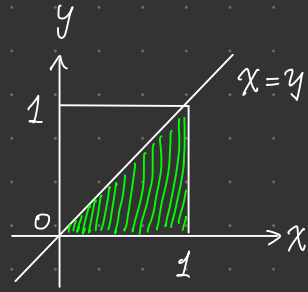
↳  $1 \leq y \leq 2$  (定数)    ↳  $0 \leq x \leq 4 - 2y$  (変数)

$$\text{与式} = \int_1^2 \left\{ \int_0^{4-2y} f(x,y) dx \right\} dy$$



問7 Point 前問と同じ

$0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$  であるから、領域は図のようになる  
この領域は、 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$



$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-x^2} dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ e^{-x^2} [y]_0^x \right\} dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-1} - 1) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e})}} \end{aligned}$$

問8 Point 求める体積をVとする。積分領域を不等式で表し積分を行う。

求める体積をVとする。 $x+y=2$ より、 $y=2-x$ であるから、領域は次の不等式で表すことができる。

$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x$  この領域内で  $z=4-x^2 \geq 0$  となる

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{2-x} (4-x^2) dy \right\} dx = \int_0^2 (4-x^2) [y]_0^{2-x} dx = \int_0^2 (4-x^2)(2-x) dx = \int_0^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 8x \right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} - 8 + 16 = \frac{12-16+24}{3} = \underline{\underline{\frac{20}{3}}} \end{aligned}$$

問9 (1) 領域Dを  $x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$  とすると、この領域は次の不等式で示すことができる。

$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$  この領域内で  $z=y \geq 0$  であるから求める体積をVとすると

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D y dx dy = 2 \int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy \right\} dx = 2 \int_0^a \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_0^a (a^2-x^2) dx = \left[ a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ &= a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \underline{\underline{\frac{2}{3}a^3}} \end{aligned}$$

(2) 領域Dを  $x^2+y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0$  とすると、この領域は次の不等式で示すことができる。

$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$  この領域内で  $z=\sqrt{a^2-x^2} \geq 0$  であるから求める体積をVとすると

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{a^2-x^2} dx dy = 4 \int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy \right\} dx = 4 \int_0^a \left\{ \sqrt{a^2-x^2} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right\} dx \\ &= 4 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} [y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 4 \int_0^a (a^2-x^2) dx \\ &= 4 \left[ a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a \\ &= 4 \left( a^3 - \frac{1}{3}a^3 \right) = \underline{\underline{\frac{8}{3}a^3}} \end{aligned}$$

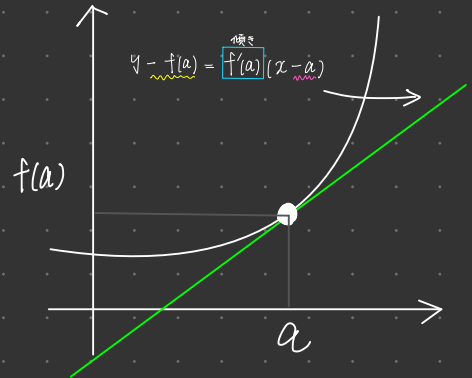
問1 Point:  $y - f(a) = \overset{\text{傾き}}{f'(a)}(x - a)$  は  $y = f'(a)$  を  
 $x$  軸に関して  $+a$ ,  $y$  軸に関して  $+f(a)$  移動させたグラフ(式)  
 $\rightarrow f(a)$ ,  $\overset{\text{傾き}}{f'(a)}$ ,  $a$  を問題文から読み取る or 計算  $\rightarrow$  代入

(1)  $\begin{array}{l|l} a & 2 \\ f(a) & 8 \\ f'(a) & 12 \end{array}$   $y - 8 = 12(x - 2)$   
 $y = 12x - 16 //$

(2)  $\begin{array}{l|l} a & -1 \\ f(a) & 1 \\ f'(a) & 2 \end{array}$   $y - 1 = 2(x + 1)$   
 $y = 2x + 3 //$

(3)  $\begin{array}{l|l} a & \pi \\ f(a) & -1 \\ f'(a) & 0 \end{array}$   $y + 1 = 0(x - \pi)$   
 $y = -1 //$

(4)  $\begin{array}{l|l} a & -2 \\ f(a) & e^{-2} \\ f'(a) & e^{-2} \end{array}$   $y - e^{-2} = e^{-2}(x + 2)$   
 $y = \frac{x}{e^2} + \frac{3}{e^2} //$



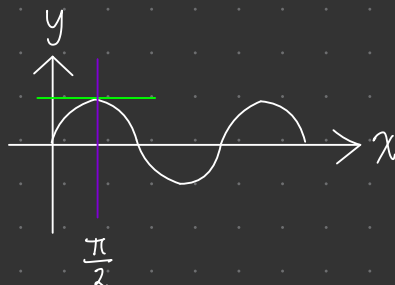
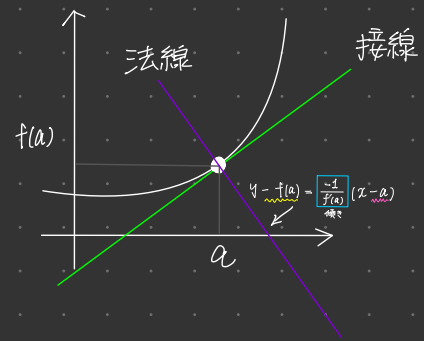
かけると -1 なら  
直交する!!!

問2 Point: 法線は接線に直交させたものなので

$y - f(a) = \frac{-1}{\overset{\text{傾き}}{f'(a)}}(x - a)$  ( $\because f'(a) \times \frac{-1}{f'(a)} = -1$ )

(1)  $\begin{array}{l|l} a & 1 \\ f(a) & 4 \\ \frac{-1}{f'(a)} & -\frac{1}{5} \end{array}$   $y - 4 = -\frac{1}{5}(x - 1)$   
 $y = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5} //$

(2)  $\begin{array}{l|l} a & \frac{\pi}{2} \\ f(a) & 1 \\ \frac{-1}{f'(a)} & 0 \end{array}$   $f'(a) = 0$  のとき  
 接線が  $y = \text{定数}$   
 法線は  $x = a$  となる  $x = \frac{\pi}{2}$

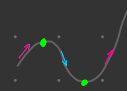


問<sub>3</sub> Point: (開区間  $a < x < b$ ) ある区間で  $f'(x) < 0 \rightarrow$  単調減少  $f'(x) > 0 \rightarrow$  単調増加

(1)  $f'(x) = -4x^4 - 2 = -\underbrace{(4x^4 + 2)}_{\text{正}} < 0$  単調減少

(2)  $f'(x) = 1 - \cos x = 1 - \underbrace{\cos x}_{-1 \leq \cos x \leq 1} > 0$  単調増加  
 と  $a, x$  じゃあ!

問<sub>4</sub> Point: ①  $f'(x) = 0$  となる点 (山 or 谷) を探す。

② 増減表を書く 

(1) ①  $f'(x) = 4x + 8 = 0 \quad x = -2$

②

$x$	...	-2	...
$f(x)$	↘	3	↗
$f'(x)$	-	0	+

$x < -2$  のとき減少,  $x > -2$  のとき増加

(2) ①  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad x = 2, -1$

②

$x$	...	-1	...	2	...
$f(x)$	↗	14	↘	-13	↗
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$x < -1, x > 2$  のとき増加  
 $-1 < x < 2$  のとき減少

(3) ①  $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x+1)(x-1)$   
 $x = 0, \pm 1$

②

$x$	...	-1	...	0	...	1	...
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$-1 < x < 0, x > 1$  のとき増加  
 $x < -1, 0 < x < 1$  のとき減少

問5 Point ①  $f'(x) = 0$  となる点 (山 or 谷) を探す。

② 増減表を書く

③ グラフ描画

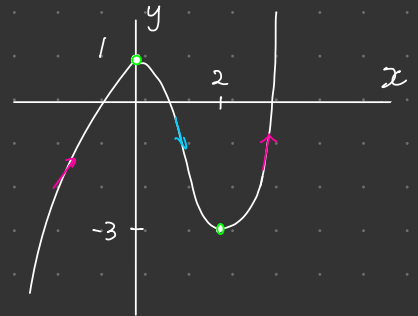
極大  $\rightarrow$  "最大値" ではなく 『ｸﾞﾗﾌの山』  
 極小  $\rightarrow$  "最小値" ではなく 『ｸﾞﾗﾌの谷』

(1) ①  $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \Rightarrow x = 0, 2$

②

$x$	...	<u>0</u>	...	<u>2</u>	...
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

極大値 1 ( $x=0$ )  
 極小値 -3 ( $x=2$ )

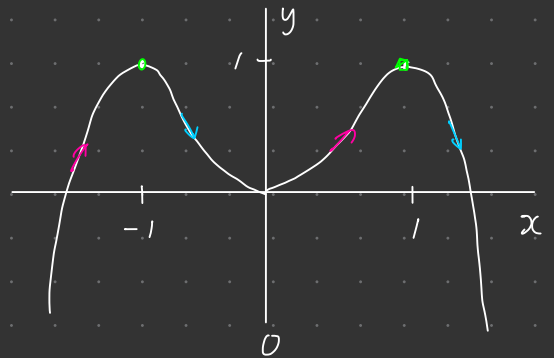


(2) ①  $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) \Rightarrow x = 0, \pm 1$

②

$x$	...	<u>-1</u>	...	<u>0</u>	...	<u>1</u>	...
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

極大値 1 ( $x = \pm 1$ )  
 極小値 0 ( $x = 0$ )

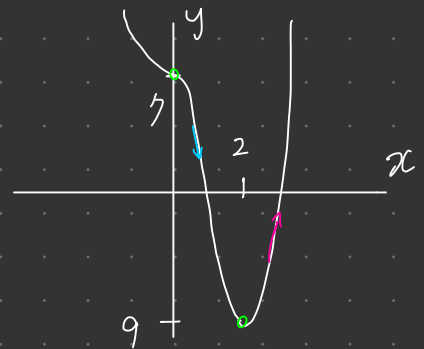


(3) ①  $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2) \Rightarrow x = 0, 2$

②

$x$	...	<u>0</u>	...	<u>2</u>	...
$f(x)$	$\searrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$
$f'(x)$	-	0	-	0	+

極大値 なし  
 極小値 -9 ( $x=2$ )

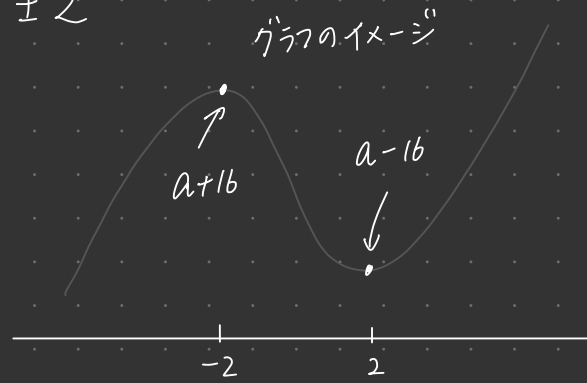


問6  $y = x^3 - 12x + a$  の増減表を書くと之極大, 極小を 'a' と示す。

$$y' = 3x^2 - 12 = 0 \iff x = \pm 2$$

$x$	...	-2	...	2	...
$f(x)$	→	$a+16$	↘	$a-16$	↗
$f'(x)$	+	0	-	0	+

極大
極小



よって  $a+16 > 0$  (正),  $a-16 < 0$  (負)  $\longrightarrow a > -16, a < 16$   
 $-16 < a < 16 //$

問7 Point ①  $f'(x) = 0$  となる点 (山 or 谷) を探す。

② 増減表を書く ③ グラフ描画

問5と同様に

- |   |  |                                     |
|---|--|-------------------------------------|
| ① | $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0$                                | $x = +1, -3$                        |
| ② | $f'(x) = 1 - 2\sin x = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2}$        | $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ |
| ③ | $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x} \cdot x(2-x^2) = 0$ | $x = 0, \pm 2$                      |
| ④ | $f'(x) = 1 - x^{\frac{1}{2}} = 0$                          | $x = 1$                             |
- 最大値 ○ 極大値 —  
 最小値 ● 極小値 —

(1)

$x$	-1	...	1	...	2
$f(x)$	12	↘	-4	↗	3
$f'(x)$		-	0	+	

最大値 12 ( $x = -1$ )  
 最小値 -4 ( $x = 1$ )

(2)

$x$	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	$\pi$
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗	$\pi - 2$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

最大値  $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$  ( $x = \frac{\pi}{6}$ )  
 最小値  $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$  ( $x = \frac{5\pi}{6}$ )

(3)

$x$	0	...	2	...	3
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	$\frac{9}{e^3}$
$f'(x)$		+	0	-	

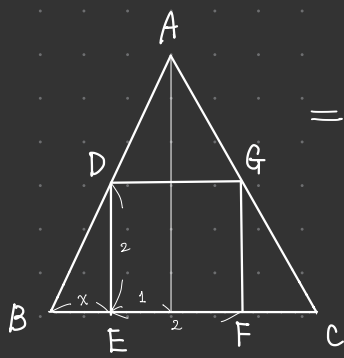
最大値  $\frac{4}{e^2}$  ( $x = 2$ )  
 最小値 0 ( $x = 0$ )

(4)

$x$	0	...	1	...	4
$f(x)$	0	↘	-1	↗	0
$f'(x)$		-	0	+	

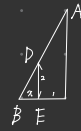
最大値 0 ( $x = 0, 4$ )  
 最小値 -1 ( $x = 1$ )

問8 (1)  $S = \underbrace{BC}_{\text{底辺}} \times \underbrace{\text{頂点AからBCに垂れた垂線}}_{\text{高さ}} \times \frac{1}{2}$



$$= (2+2x) \times 2 \times \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{2} = \frac{2(x+1)^2}{x}$$

$BE+EF+FC$



相似を利用して求めた!  
 $x : x+1 = 2 : ?$

$$x > 0$$

(2) グラフの概形を書くために増減表を書く。

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} (2(x+1) \cdot x - (x+1)^2) = \frac{2}{x^2} (x+1)(2x - x - 1)$$

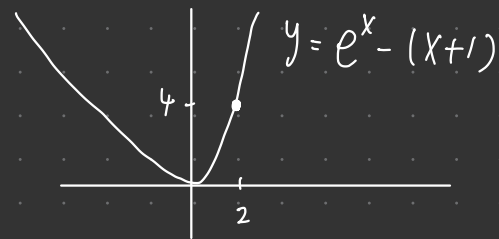
$$= \frac{2}{x^2} (x+1)(x-1)$$

$x$	0	...	1	...
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	8	$\rightarrow$
$f'(x)$	$\times$	-	0	+

$x = 1$   $x = \pm 1$

問9 (1)  $y = e^x - (x+1)$  とおき  $f'(x) = e^x - 1 = 0 \rightarrow x = 0$

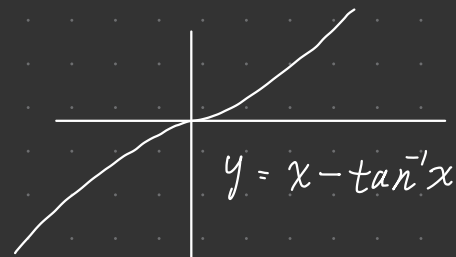
$x$	...	0	...
$f(x)$	$\searrow$	0	$\rightarrow$
$f'(x)$	-	0	+



最小値  $x=0$  のとき 0 より  
 この関数はおき  $e^x \geq x+1$

(2)  $y = x - \tan^{-1}x$  とおき  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$x$	...	0	...
$f(x)$	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$
$f'(x)$	+	0	+



グラフより  
 $x \geq 0$  のとき  $x \geq \tan^{-1}x$

問10 Point: ロピタルの定理  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'}{g'}$  を用いる!

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 + 4x}{3x^2 + 6x} = \frac{8}{9}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -e^x = -1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos 2x}{5\cos 5x} = \frac{2}{5}$$

問11 Point: ロピタルの定理  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''}{g''}$  を用いる!

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{5x^4 - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{20x^3} = \frac{3}{10}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\cos x} = 6$$

問12 Point: ロピタルの定理  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'}{g'} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''}{g''}$  を用いる!

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(1+x)}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + 4}{2} = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +0} -2 \cdot x^{-1+\frac{3}{2}} = 0$$

52. Point! 関数の平行移動  $y=f(x) \rightarrow y-g=f(x-p)$  と混同しないようにしよう。

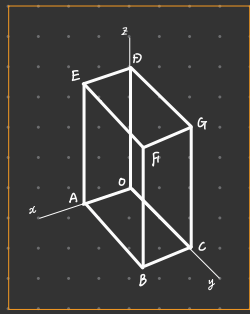
↑  
 上式は、相対的に「グラフ」ではなく「軸」を動かしているので、  
 x軸に +p, y軸に +g, 平行移動させるのに、  
 式では -p, -g となっている。

点Bはxy平面上の点であり、 $OC \parallel AB, OA \parallel CB$ であるから、 $B(1, 3, 0)$

点Eはxz平面上の点であり、 $OA \parallel DE, EF \parallel DQ$ であるから、 $E(1, 0, 2)$

点FはDG // EF, BC // FGであるから、 $F(1, 3, 2)$

点Gはyz平面上の点であり、 $OC \parallel DG, BC \parallel FG$ であるから、 $G(0, 3, 2)$



53. Point! 各(xz or yz or xy)座標平面に垂線を下ろす  $\rightarrow$  (z or x or y)の座標の値が0になる。

点Qはxz平面上の点であるから、点Qのy座標は0

点Pから垂線を引いた点であるから、点Qのx座標とz座標は点Pと等しい。

よって、 $Q(3, 1, 0)$

点Rはyz平面上の点であるから、点Rのx座標は0

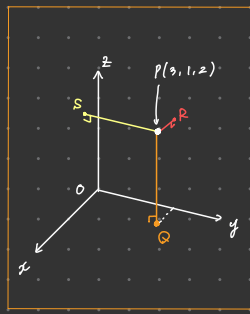
点Pから垂線を引いた点であるから、点Rのy座標とz座標は点Pと等しい。

よって、 $R(0, 1, 2)$

点Sはxz平面上の点であるから、点Sのy座標は0

点Pから垂線を引いた点であるから、点Sのx座標とz座標は点Pと等しい。

よって、 $S(3, 0, 2)$



54. Point! 2点  $(x, y, z), (x', y', z')$  の距離が  $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$  になることをきちんと証明しよう。

$$\sqrt{(1-2)^2 + (-2-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{1+9+16}$$

$$= \sqrt{26}$$

55. Point! 等しいもの同士の関係を一コールで結ぶ →  $x$  に関する方程式を立てよう。

$$\sqrt{(0-2)^2 + (-1+5)^2 + (z+3)^2} = 6$$

$$4 + 16 + (z+3)^2 = 36$$

$$(z+3)^2 = 16$$

$$z+3 = \pm 4$$

$$z = \pm 4 - 3$$

$$\therefore z = 1, -7$$

56. Point! 平面ベクトルと同じ考え方です。

$$(1) \vec{a} - \vec{b} = (-1-1, 4+3, 1-0)$$

$$= (-2, 7, 1)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}$$

$$= 3\sqrt{6}$$

$$(2) 2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(-1, 4, 1) + 3(1, -3, 0)$$

$$= (-2, 8, 2) + (3, -9, 0)$$

$$= (1, -1, 2)$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{6}$$

57. Point!  $\vec{AB}$  の成分表示が欲しいのは (点Bの座標) - (点Aの座標) をしよう。

$$\vec{AB} = (2-5, 3+1, -4-1)$$

$$= (-3, 4, -5)$$

〈覚え方〉

- ・後から前を減算する
- ・お尻から頭を減算する

$$\vec{CB} = (1+2, -4-0, 8-3)$$

$$= (3, -4, 5)$$

$$\vec{AB} = -\vec{CB} = \vec{DC} \text{ より、平行四辺形}$$

58. Point! これまでの範囲で学んだ内分の式  $\frac{n\vec{A}+m\vec{B}}{m+n}$  と変わらない!

$$(1) \left( \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-4)}{1+2}, \frac{2 \cdot 7 + 1 \cdot 1}{1+2}, \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 5}{1+2} \right) = \underline{(0, 5, 1)}$$

$$(2) \left( \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)}{3+2}, \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 1}{3+2}, \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5}{3+2} \right) = \underline{\left( -\frac{8}{5}, \frac{17}{5}, \frac{13}{5} \right)}$$

「比を足したものを分母に、比を互いに違いに702して分子にて掛け算する」  
 というノリ!

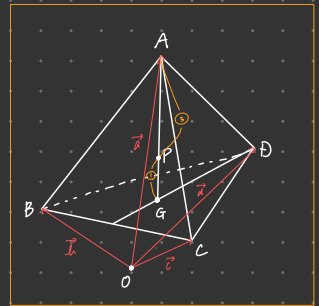
59. Point! この類の文章(条件)付き図形問題は  
 図に書き込む or 日本語に対応する数学的仮手続きの対応レポートを増やす。しかない!  
 慣れると図に書き込むことなく回答できるようになる!

(1) 点Gは△BCDの重心であるから、

$$\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

(2) 点Pは、線分AGを3:1の比に内分する点だから、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{1 \cdot \vec{OA} + 3 \cdot \vec{OG}}{3+1} \\ &= \frac{1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}}{3}}{3+1} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}}{4} \end{aligned}$$



60. Point! 平面ベクトルと同じ考え方で。

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 6 \cdot 1 = \underline{5}$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{a} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + (-5) \cdot 3 = \underline{-9}$$

61. Point! 平面ベクトルと同じ考えです。

2つのベクトルのなす角を $\theta$ とおく。 $(0 \leq \theta \leq \pi)$

$$(1) |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = 7$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -3$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{5}{6}\pi$$

62. Point! 平面ベクトルと同じ考え方です。

求める単位ベクトルを  $\vec{c} = (x, y, z)$  とおくと、

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ より、 } 2x + y + 3z = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \text{ より、 } -x + 3y + 2z = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より、 } y = -2x - 3z$$

$\textcircled{2}$  に代入すると、

$$-x + 3(-2x - 3z) + 2z = 0$$

$$-x - 6x - 9z + 2z = 0$$

$$7z = -7x$$

$$z = -x$$

$\textcircled{1}$  に代入すると、

$$y = -2x + 3x$$

$$= x$$

$$\text{よって、 } \vec{c} = (x, x, -x)$$

$$= x(1, 1, -1)$$

これより、 $\vec{c} = (1, 1, -1)$  とおくと、 $\vec{c}$  は  $\vec{a}$  に平行である。

$\vec{c}$  は単位ベクトルだから、

$$\vec{c} = \pm \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1)$$

63. Point! この類の文章(条件)付き図形問題は  
 図に書き込む or 日本語に対応する数学的仮手続きの対応レポート-ε増やすしかない!  
 慣れると図に書き込むことなく回答できるようになる!

$$(1) \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$(2) \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= \vec{b} - \vec{a}$$

より、

$$\vec{OG} \cdot \vec{AB} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \frac{1}{3} (\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c})$$

$$= \frac{1}{3} (-|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a})$$

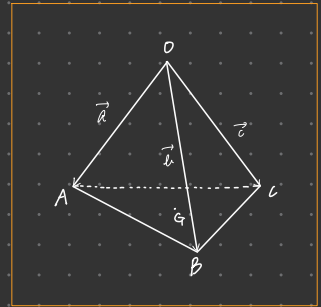
ここで、 $OABC$ は正四面体であるから、

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|, \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

したがって、

$$\vec{OG} \cdot \vec{AB} = 0$$

ゆえに、 $\vec{OG} \perp \vec{AB}$



64. Point! 平面ベクトルと同じ考え方で。

(1) 求める直線を  $\vec{OP} = (x, y, z)$  とおくと、

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, 2, -1) + \alpha(2, -4, 5) \\ &= (1+2\alpha, 2-4\alpha, -1+5\alpha)\end{aligned}$$

両辺の成分を比較して、

$$\underline{x = 1 + 2\alpha, y = 2 - 4\alpha, z = -1 + 5\alpha \quad (\alpha \text{ は実数})}$$

または

$$\underline{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+1}{5}}$$

(2)  $A(-3, 5, 1), B(3, 4, 2)$  とすると、

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (3+3, 4-5, 2-1) \\ &= (6, -1, 1)\end{aligned}$$

2点  $A, B$  を通る直線は、点  $A$  を通り  $\vec{AB}$  に平行だから、

求める直線を  $\vec{OP} = (x, y, z)$  とおくと、

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (-3, 5, 1) + \alpha(6, -1, 1) \\ &= (-3+6\alpha, 5-\alpha, 1+\alpha)\end{aligned}$$

両辺の成分を比較して、

$$\underline{x = -3 + 6\alpha, y = 5 - \alpha, z = 1 + \alpha \quad (\alpha \text{ は実数})}$$

または

$$\underline{\frac{x+3}{6} = \frac{y-5}{-1} = z-1}$$

65. Point! 平面ベクトルと同じ考え方です。角度を求めるので、方向ベクトル(直線と言う傾きのなもの)だけ分かれば良い。

$$l_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{-1}, \quad l_2: x+2 = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{3} \quad \text{とする。}$$

2直線  $l_1, l_2$  の方向ベクトルをそれぞれ  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  とすると、

$$\vec{v}_1 = (2, 3, -1), \quad \vec{v}_2 = (1, -2, 3)$$

$\vec{v}_1$  と  $\vec{v}_2$  のなす角を  $\theta$  とおくと、

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_2| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \\ &= -7 \end{aligned}$$

①に代入すると、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ より、 } \theta = 60^\circ$$

66. Point! 平面ベクトルと同じ考え方です。角度を求めると、方向ベクトル(直線と言う傾きのもの)だけ分かれば良い。  
( $\cos 90^\circ =$  内積の定義(長の式)  $= 0$  で立式しよう)

2直線  $l_1, l_2$  の方向ベクトルをそれぞれ  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  とすると、

$$\vec{v}_1 = (4, 6, 3), \quad \vec{v}_2 = (-3, k, 2)$$

$l_1 \perp l_2$  であるから、 $\vec{v}_1$  と  $\vec{v}_2$  のなす角は  $90^\circ$ 。

よって、 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$  であるから、

$$4 \cdot (-3) + 6 \cdot k + 3 \cdot 2 = 0$$

$$-12 + 6k + 6 = 0$$

$$6k = 6$$

$$\underline{k = 1}$$

67. Point! 平面の方程式  $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ ,  $ax + by + cz + d = 0$  を証明しておこう。

(1) ベクトル  $(2, -1, 4)$  に垂直で点  $(1, 6, -1)$  を通るから、

$$2(x-1) - (y-6) + 4(z+1) = 0$$

$$2x - 2 - y + 6 + 4z + 4 = 0$$

$$\underline{2x - y + 4z + 8 = 0}$$

(2) 求める平面は、平面  $x + 5y - 2z = 1$  に平行であるから、

$$x + 5y - 2z = k \quad (k \text{ は実数})$$

とおける。

点  $(-4, 3, 1)$  を通るから、

$$-4 + 5 \cdot 3 - 2 = k$$

$$k = 9$$

$$\underline{x + 5y - 2z - 9 = 0}$$

(3) 求める平面の方程式を  $ax + by + cz + d = 0$  とおく。

$$\text{点}(1, 2, 3) \text{ を通るから, } a + 2b + 3c + d = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{点}(3, 4, 1) \text{ を通るから, } 3a + 4b + c + d = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{点}(0, 3, 8) \text{ を通るから, } 3b + 8c + d = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$  より、

$$2a + 2b - 2c = 0$$

$$a + b - c = 0$$

$$c = a + b \quad \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$  に代入すると、

$$3b + 8(a + b) + d = 0$$

$$3b + 8a + 8b + d = 0$$

$$d = -8a - 11b \quad \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}$ ,  $\textcircled{5}$  を  $\textcircled{1}$  に代入すると、

$$a + 2b + 3(a + b) + (-8a - 11b) = 0$$

$$a + 2b + 3a + 3b - 8a - 11b = 0$$

$$4a + 6b = 0$$

$$b = -\frac{2}{3}a$$

$\textcircled{4}$  に代入すると、 $c = \frac{1}{3}a$

$\textcircled{5}$  に代入すると、 $d = -\frac{2}{3}a$

したがって、

$$ax - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{3}az - \frac{2}{3}a = 0$$

ここで、 $a = 0$  とすると  $b = c = d = 0$  となるから、 $a \neq 0$  である。

よって、両辺を  $a$  で割って3倍すると、

$$\underline{3x - 2y + z - 2 = 0}$$

68. Point! 平面的法線ベクトルは平面に直交する方向を示すため、平面の方向を表すと言っても過言ではない。  
(1つの平面に対して法線ベクトルは2つに限定されるため)  
P.39の図にあるように平面のなす角を直接求めるのではなく、法線ベクトルのなす角を求める。  
それは平面のなす角と等しいので平面のなす角が求まることになる。

ベクトル  $(2, 6, -3)$ ,  $(4, -9, 1)$  はそれぞれの平面の法線ベクトルの1つである。

この2つのベクトルのなす角を  $\theta$  とすると、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{2 \cdot 4 + 6 \cdot (-9) + (-3) \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} \sqrt{4^2 + (-9)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{-49}{7 \cdot 7\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\theta = 135^\circ \text{ より } 180^\circ - \theta = \underline{45^\circ}$$

69. Point! 問17の知識を用いて方程式を立式してみよう。

ベクトル  $(1, k+1, 5)$ ,  $(k, -4, 2)$  はそれぞれの平面の法線ベクトルの1つである。

この2つのベクトルが垂直になれば良いから、

$$1 \cdot k + (k+1) \cdot (-4) + 5 \cdot 2 = 0$$

$$k - 4k - 4 + 10 = 0$$

$$3k = 6$$

$$\underline{k = 2}$$

70. Point! 点と平面の距離の公式を導出。証明チャレンジしてから問題を解こう。  
(問題を解くことは式に数値を代入するだけなので大した勉強にはならない)

$$(1) \frac{|1 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$(2) \frac{|1 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$(3) \frac{|1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) + 3 \cdot (-6) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{26}}$$

71. Point! 球のバケトル方程式を導出。証明チャレンジしてから問題を解こう。  
(問題を解くことは式に数値を代入するだけなので大した勉強にはならない)

$$(1) \underline{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 5}$$

(2) 球の中心と点(3, -2, 1)の距離が球の半径であるから、

$$\begin{aligned} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} &= \sqrt{9+4+1} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

したがって、求める球の方程式は  $\underline{x^2 + y^2 + z^2 = 14}$

(3) 球の中心と点(1, 0, 4)の距離が球の半径であるから、

$$\begin{aligned} \sqrt{(1+2)^2 + (0-1)^2 + (4-5)^2} &= \sqrt{9+1+1} \\ &= \sqrt{11} \end{aligned}$$

したがって、求める球の方程式は  $\underline{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 11}$

(4) 二の球の中心は、2点(2, -5, 3), (4, 3, 1)の中点であるから、その座標は

$$\left( \frac{2+4}{2}, \frac{-5+3}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (3, -1, 2)$$

この球の半径は、2点(2, -5, 3), (4, 3, 1)をつないだ線分の長さの $\frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{(2-4)^2 + (-5-3)^2 + (3-1)^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{4+64+4} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって、求める球の方程式は  $\underline{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 18}$

72. Point! 平面とともに線形(一次)独立・線形従属とは何なのか。言葉で定義を語るように訓練しよう。

$$(1) x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 + 8z - 4 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + (z+4)^2 - 16 - 4 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25$$

中心  $(2, 1, -4)$ , 半径 5

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4z + 5 = 0$$

$$x^2 + 6x + y^2 + z^2 - 4z + 5 = 0$$

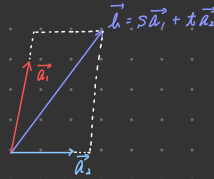
$$(x+3)^2 - 9 + y^2 + (z-2)^2 - 4 + 5 = 0$$

$$(x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$$

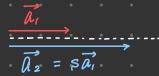
中心  $(-3, 0, 2)$ , 半径  $2\sqrt{2}$

<平面>

○ 線形(一次)独立: 「2本の中のどちらの1本も, 他の1本のスカラー倍で表現できない」



○ 線形従属



<空間>

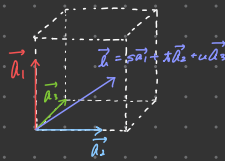
○ 線形(一次)独立: 「3本の中のどの1本も, 他の2本のスカラー倍と足し算で表現できない」

線形(一次)独立(空間)を数式にすると

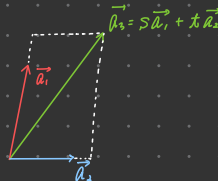
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が線形(一次)独立



$l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} = \vec{0}$  を満たす実数  $l, m, n$  の組み合わせは,  $(l, m, n) = (0, 0, 0)$  しか存在しない。



○ 線形従属



73. Point! 平面ととも線形(一次)独立・線形従属とは何なのか、言葉で定義を語るように訓練しよう。

交点  $R$  は直線  $AG$  上であるから、 $\vec{OR} = \vec{OA} + t\vec{AG}$  より、

$$\begin{aligned}\vec{OR} &= \vec{OA} + t(\vec{OG} - \vec{OA}) \\ &= \vec{OA} + t\left(\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} - \vec{OA}\right) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}t\right)\vec{OA} + \frac{t}{3}\vec{OB} + \frac{t}{3}\vec{OC} \quad \text{①}\end{aligned}$$

また、 $R$  は  $O, B, C$  を含む平面上の点であるから、

$$\vec{OR} = l\vec{OB} + m\vec{OC} \quad \text{②}$$

①, ② より、

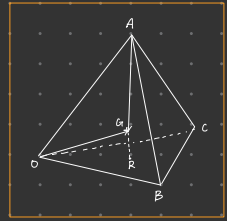
$$\left(1 - \frac{2}{3}t\right)\vec{OA} + \frac{t}{3}\vec{OB} + \frac{t}{3}\vec{OC} = l\vec{OB} + m\vec{OC}$$

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  は線形独立であるから、係数を比較し、

$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{3}t = 0 \\ \frac{t}{3} = l \\ \frac{t}{3} = m \end{cases}$$

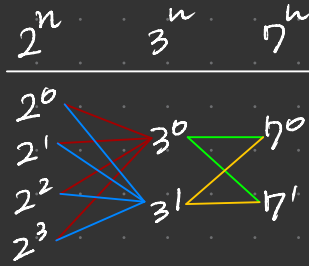
よって、 $t = \frac{3}{2}$ ,  $l = \frac{1}{2}$ ,  $m = \frac{1}{2}$

$$\text{したがって、}\vec{OR} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$



問1  $168 = 8 \times 21 = 2^3 \times 3 \times 7$

よって168の約数は



$4 \times 2 \times 2 = 16 \rightarrow 16$ 通り

⑤ 一般的に  $X = a^p b^q c^r$  の時  
 $X$  の約数の個数  $n$  は  
 $n = (p+1)(q+1)(r+1)$

問2 ⑤ ① (1)  $4 \times 3 \times 5 = 60$  60個 //

(2)  $x^3(x^2-1) = x^3(x+1)(x-1)$   
 よって  $4 \times 2 \times 2 = 16$  16個 //

問3 式変形すると  $y \leq 16 - 4x$  となり  $y$  の選ぶ方は

- $x=1$  のとき  $y$  は  $y \leq 12$  12通り
  - $x=2$  のとき  $y$  は  $y \leq 8$  8通り
  - $x=3$  のとき  $y$  は  $y \leq 4$  4通り
- よって  $12+8+4=24$  通り //

問4  $y+z=w$  とおき 問2 と同様にすると

- $w = 12 - 3x$  となり  $w$  の選ぶ方は
- $x=1$  のとき  $w$  は  $w=9 \rightarrow \alpha$
  - $x=2$  のとき  $w$  は  $w=6 \rightarrow \beta$
  - $x=3$  のとき  $w$  は  $w=3 \rightarrow \gamma$

自然数  $n$  を 2つの自然数の和で示したときの10進数  $\rightarrow n-1$  通りなので

$\alpha: (y, z) = (8, 1)(7, 2)(6, 3)(5, 4)(4, 5)(3, 6)(2, 7)(1, 8) \rightarrow 8$  通り

$\beta: \text{同様に} \rightarrow 5$  通り

$\gamma: \text{同様に} \rightarrow 2$  通り

} 15通り

問5 大 = 中  $\times$  小 を  $z = y \times x$  ( $z, y, x \leq 6$  ただし  $x, y, z$  は自然数) とすると

$z \setminus y$	1	2	3	4	5	6
1	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2	✓	✓	✓	×	×	×
3	✓	✓	×	×	×	×
4	✓	×	×	×	×	×
5	✓	×	×	×	×	×
6	✓	×	×	×	×	×

よって 14 通り

選ぶば 選ぶ程  
減っていくイメージ!

$nP_m$  って?

$n$  個のものから  $m$  個取り出して並べるの  
樹形図を考えると同じ!

1つめ	2つめ	3つめ	$\dots$	$n$ 個め
$n$	$n-1$	$n-2$	$\dots$	$n-m+1$
通り	通り	通り		通り

問6 (1)  ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

(2)  ${}_7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

(3)  ${}_6P_1 = 6$

(4)  ${}_6P_6 = 6! = 720$

問7 (1)  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  (2)  $4! = (1) \text{の答え} \times 4 = 24$   
 (3)  $10! \div 9! = 10$  (4)  $n! \div (n-2)! = n \times (n-1) = n^2 - n$

問8 まず「両端が母音となるように固定する」  $a \circ \circ \circ \circ e$   
 後は内側の  $\circ$  4つに子音4つを取り出して並べ替えるので  $\circ \circ \circ \circ$  の子音配置パターンは  $4! = 4!$   
 しかし  $a \circ \circ \circ \circ e$  以外にも  $e \circ \circ \circ \circ a$  の母音が両端に来るパターンもあるので  
 (式)  $2 \times 4! = 48$ 通り

問9 (1) 6号分の部屋から3つ選ぶ(並べない2良!)が  
 ${}^6P_3 \div 3! \times 3! = 120$ 通り  
並べ替えて重複した分割は  
その3つの中で3人が「順列」で並ぶので

(2) 6号分の部屋の内3つを1まとまりとする。  $\circ \circ \circ \circ$  ように  
 が「どの位置か」で4通り、3人が「内」で「どの配置になるか」で  ${}^3P_3 = 3!$   
 よって  $4 \times 3! = 24$ 通り

問10 大 中 小  
 $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$  216通り

問11 1人目 2人目 3人目 4人目  
 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 通り

問12 2進数で104の表現方法と同義  $2^{10} = 1024$

問13 (1)  ${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$  (2)  ${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$  (3)  ${}_7C_5 = (2) = 21$   
 (4)  ${}_nC_1 = \frac{n}{1} = n$  (5)  ${}_nC_n = 1$

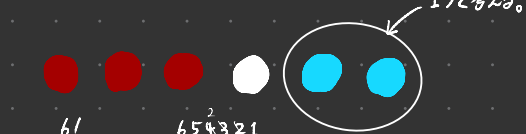
問14  ${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)! r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r$  次へは  ${}_nC_n = {}_nC_0$ !

問15 (1)  ${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$  (2)  ${}_8C_3 \times {}_6C_2 = 56 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 840$

問16 (1) 線分:  ${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ 本 (頂点6つの中6 2つ選ぶ45個)  
 三角形:  ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ 個 (頂点6つの中6 3つ選ぶ45個)

問17 左辺 =  $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$  右辺 =  $\frac{6 \times 5}{2 \times 1} + 2 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15 + 40 + 15 = 70$  証明終

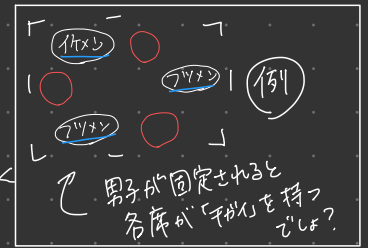
問18  $\frac{8!}{4!3!1!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1} = 280$

問19   
 $\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1} = 60$ 通り  
 $\frac{5!}{3!1!1!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1} = 20$ 通り

問<sub>20</sub> (1) 男女無差別に 6人を円順列で並べると  $(6-1)! = 120$ 通り

(2) 円順列なので  $(3-1)! \times 3! = 12$ 通り

↑ 男子を円順列で  
↑ 男子の位置が決まると女子は円順列で並べられる



問<sub>21</sub> (1)  $(a+1)^6 = {}_6C_6 a^6 \cdot 1^0 + {}_6C_5 a^5 \cdot 1^1 + {}_6C_4 a^4 \cdot 1^2 + {}_6C_3 a^3 \cdot 1^3 + {}_6C_2 a^2 \cdot 1^4 + {}_6C_1 a \cdot 1^5 + {}_6C_0 a^0 \cdot 1^6$   
 $= a^6 + 6a^5 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a^4 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^3 + \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} a^2 + 6a + 1$   
 $= a^6 + 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + 1$

(2)  $(a+3b)^4 = {}_4C_4 a^4 \cdot (3b)^0 + {}_4C_3 a^3 \cdot (3b) + {}_4C_2 a^2 \cdot (3b)^2 + {}_4C_1 a \cdot (3b)^3 + {}_4C_0 a^0 \cdot (3b)^4$   
 $= a^4 + 12a^3b + 54a^2b^2 + 108ab^3 + 81b^4$

(3)  $(x-1)^7 = {}_7C_7 x^7 (-1)^0 + {}_7C_6 x^6 (-1)^1 + {}_7C_5 x^5 (-1)^2 + {}_7C_4 x^4 (-1)^3 + {}_7C_3 x^3 (-1)^4 + {}_7C_2 x^2 (-1)^5 + {}_7C_1 x (-1)^6 + {}_7C_0 x^0 (-1)^7$   
 $= x^7 - 7x^6 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} x^5 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^4 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^3 - \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} x^2 + 7x - 1$   
 $= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$

問<sub>22</sub>  $(\frac{x}{2} - 2y)^8 = {}_8C_5 (\frac{x}{2})^5 (-2y)^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{x^5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \times (-8y^3)$   
 $= -14x^5y^3$  5/2/14

$nC_m$ とは...?

$$nC_m = \frac{nP_m}{mP_m}$$

組み合わせだと  
134 (a,b) (b,a) も同じ!

だから  $mP_m = m!$  (重複がない)  
重複がないに '1' を掛けている。

A, B, C から2つ選ぶ → 組み合わせ  
→ 重複なし

例  ${}_3C_2 \rightarrow (A,B) (B,C) (C,A)$   
→ Cは必ず入る!!!

${}_3P_2 \rightarrow (A,B) (B,C) (C,A)$   
(B,A) (C,B) (A,C)