

第1問 次の各問いに答えなさい.

- [1] 定義域を $0 \leq x < 2\pi$ とする関数

$$y = \sin x + \cos x + \sin x \cos x$$

の値域を求めなさい.

- [2] $2^x - 2^{-x} = 4$ のとき, $2^x + 2^{-x}$ の値を求めなさい.

- [3] 方程式 $\log_9(x^2 + 1) - \log_3 x = 1$ を解きなさい.

第2問 次の各問いに答えなさい.

[1] 関数 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$ の極大値を求めなさい.

[2] 定積分 $\int_{-2}^1 (x^2 - 2x - 5)(x - 1) dx$ を求めなさい.

[3] $a_1 = 7, a_{n+1} = 3a_n - 10$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい.

[4] xyz 空間における 2 点 $A(-2, 2, 3), B(4, 6, -7)$ について,
線分 AB を直径とする球面の方程式を求めなさい.

第3問 k は実数の定数とする.

実数全体を定義域とする次の2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について, 下の各問いに答えなさい.

$$f(x) = x^2 - 2(k-2)x + 2k^2, \quad g(x) = -x^2 + 2(k+1)x.$$

- (1) $f(x) - g(x)$ を計算しなさい.
- (2) $f(x)$ の最小値を求めなさい.
- (3) $g(x)$ の最大値を求めなさい.
- (4) 少なくとも1つの実数 x に対して等式 $f(x) = g(x)$ が成り立つような k の値の範囲を求めなさい.
- (5) 「全ての実数 x に対して不等式 $g(x) < y < f(x)$ を満たす実数 y が存在する」
ような k の値の範囲を求めなさい.
- (6) 「ある実数 y が存在して, 全ての実数 x に対し不等式 $g(x) < y < f(x)$ が成り立つ」
ような k の値の範囲を求めなさい.

工学部 一般 A (2/3)

2022 年度
工学部
一般選抜 A (2/3)
数学
解答用紙

受験番号						
------	--	--	--	--	--	--

生年月日					年			月			日
------	--	--	--	--	---	--	--	---	--	--	---

採点欄

注意事項

第1問と第2問に対する解答は、この用紙の下方の指定枠の中に 結果だけ を書きなさい。

第3問に対する解答は、この用紙の裏面に 結果だけでなく過程も 書き入れなさい。

どの問題を解いているかが分かるように 該当する小問題の番号を明記し、見やすく記述する こと。

第1問

[1]	$-1 \leq y \leq \sqrt{2} + \frac{1}{2}$
[2]	$2\sqrt{5}$
[3]	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

第2問

[1]	4
[2]	$\frac{27}{4}$
[3]	$2 \cdot 3^{n-1} + 5$
[4]	$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 38$

第3問

$$(1) f(x) - g(x) = \{x^2 - 2(k-2)x + 2k^2\} - \{-x^2 + 2(k+1)x\} = \boxed{2x^2 + 2(1-2k)x + 2k^2}.$$

$$(2) \text{ 平方完成をすることにより, } f(x) = \{x - (k-2)\}^2 + k^2 + 4k - 4.$$

$$\text{よって, } f(x) \text{ の最小値は } \boxed{k^2 + 4k - 4}.$$

$$(3) \text{ 平方完成をすることにより, } g(x) = -\{x - (k+1)\}^2 + k^2 + 2k + 1.$$

$$\text{よって, } g(x) \text{ の最大値は } \boxed{k^2 + 2k + 1}.$$

$$(4) \text{ 2次方程式 } f(x) - g(x) = 0 \text{ が, 実数解を持つための必要十分条件を求めればよい.}$$

小問 (1) の結果より $f(x) - g(x) = 0$ の判別式 D について,

$$\frac{D}{4} \geq 0 \iff (1-2k)^2 - 2 \cdot 2k^2 \geq 0 \iff 1-4k \geq 0 \iff \boxed{k \leq \frac{1}{4}}.$$

$$(5) \text{ 放物線 } y = f(x) \text{ が下に凸, } y = g(x) \text{ が上に凸であることに注意すれば,}$$

2次方程式 $f(x) - g(x) = 0$ が, 実数解を持たないための必要十分条件を求めればよいとわかる.

$$\frac{D}{4} < 0 \iff 1-4k < 0 \iff \boxed{\frac{1}{4} < k}.$$

$$(6) \text{ 放物線 } y = f(x) \text{ が下に凸, } y = g(x) \text{ が上に凸であることに注意すれば,}$$

(関数 $g(x)$ の最大値) < (関数 $f(x)$ の最小値) となるための必要十分条件を求めればよいとわかる.

小問 (2) と (3) の結果を用いると,

$$(\text{関数 } g(x) \text{ の最大値}) < (\text{関数 } f(x) \text{ の最小値})$$

$$\iff k^2 + 2k + 1 < k^2 + 4k - 4$$

$$\iff \boxed{\frac{5}{2} < k}.$$