

第1問 次の各問いに答えなさい。

- 〔1〕 定義域を
- $0 \leq x < 2\pi$
- とする関数

$$y = \cos x + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

の値域を求めなさい。

- 〔2〕 方程式
- $3^{x+1} - 5 \cdot 3^{-x} + 14 = 0$
- を解きなさい。

- 〔3〕 関数
- $y = \log_2(x+3) + \log_2(5-x)$
- の最大値を求めなさい。

第2問 次の各問いに答えなさい.

[1] 関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 13$ の極大値を求めなさい.

[2] 定積分 $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x - 3)(x + 1) dx$ を求めなさい.

[3] 数列 $\{a_n\}$ が $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{3}(n^2 + 6n + 11)$ をみたすとき,

この数列の一般項を求めなさい.

[4] 座標空間の3点 A, B, C について $\overrightarrow{AB} = (4, 1, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (3, -1, 2)$ のとき, $\triangle ABC$ の面積を求めなさい.

第3問 a, b, c を実数の定数とする.

関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ は $x = -1$ で極値 $\frac{25}{6}$ をとり,

$y = f(x)$ のグラフは点 $(\sqrt{6}, 0)$ を通るとする. このとき, 次の各問いに答えなさい.

(1) a, b, c の値をそれぞれ求めなさい.

(2) t を実数の定数とする.

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における曲線の接線の方程式を求めなさい.

(3) 曲線 $y = f(x)$ の接線のうち, 点 $Q\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ を通り, Q とは異なる点で接するものを ℓ とする. ℓ と曲線 $y = f(x)$ の接点の x 座標を求めなさい.

2022 年度

工学部
一般選抜 A
(2月4日)

数学

解答用紙

受験番号

生年月日

年

月

日

採点欄

注意事項

第1問と第2問に対する解答は、この用紙の下方の指定枠の中に 結果だけ を書きなさい。第3問に対する解答は、この用紙の裏面に 結果だけでなく過程も 書き入れなさい。どの問題を解いているかが分かるように 該当する小問題の番号を明記し、見やすく記述する こと。

第1問

[1]	$-\sqrt{7} \leq y \leq \sqrt{7}$
[2]	-1
[3]	4

第2問

[1]	7
[2]	$\frac{9}{4}$
[3]	$n^2 + 3n + 2$
[4]	$\frac{7\sqrt{5}}{2}$

裏面へ続く

第3問

(1) 曲線 $y = f(x)$ は、点 $(\sqrt{6}, 0)$ と $(-1, \frac{25}{6})$ を通るから、

$$f(\sqrt{6}) = 0 \iff 6\sqrt{6} + 6b + \sqrt{6}c + 3 = 0_{(ア)}, \quad f(-1) = \frac{25}{6} \iff -a + b - c + 3 = \frac{25}{6}_{(イ)}.$$

また、 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ であることと、 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとることから、

$$f'(-1) = 0 \iff 3a - 2b + c = 0_{(ウ)}.$$

等式 (ア), (イ), (ウ) を満たす a, b, c を求めると $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{2}, c = -2$.

(2) 小問 (1) から、 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, $f'(x) = x^2 - x - 2$ である.

求める接線は、点 $(t, f(t))$ を通り 傾きが $f'(t)$ の直線だから、

$$y = f'(t)(x - t) + f(t) \iff y = (t^2 - t - 2)(x - t) + \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + 3\right)$$

$$\iff y = (t^2 - t - 2)x - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 3.$$

(3) 直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ の接点の x 座標を t とする.

小問 (2) の結果より、 ℓ の方程式は、 $y = (t^2 - t - 2)x - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 3$ である.

ℓ は、点 $Q(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2})) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{12})$ を通るから、

$$\frac{1}{12} = (t^2 - t - 2) \cdot \frac{5}{2} - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 3 \iff 8t^3 - 36t^2 + 30t + 25 = 0$$

$$\iff (2t - 5)^2(2t + 1) = 0$$

$$\iff t = \frac{5}{2} \text{ or } t = -\frac{1}{2}.$$

いま、 ℓ は Q と異なる点で接しているから、 $t \neq \frac{5}{2}$ である. 従って $t = -\frac{1}{2}$.