# スポーツスケジューリング

今堀　慎治

スポーツ競技における試合日程，対戦順序，競技施設の割り当てなどをうまく決定し，質の良いスケジュールを作成する分野は，スポーツスケジューリングと呼ばれている．本稿では，総当たりリーグ戦のスケジュール作成を対象として，基本的な総当たりリーグ戦の作成方法を述べるとともに，考慮すべきいろいろな状況と，いくつかの“質の良いスケジュール”の基準を紹介し，それらの基準のもとで質の良いスケジュールを作成する方法について説明する．

キーワード：スポーツスケジューリング，総当たりリーグ戦，組合せ最適化

## 1. はじめに

東京で行われるオリンピック・パラリンピックの開幕まであと4か月となった．昨年秋に大きな盛り上がりをみせたラグビーワールドカップにつづき，世界的なスポーツイベントが日本国内で開催されるのは非常に楽しみである．このようなイベントを実施するにあたり，実際に競技をする選手だけでなく，運営を担うスタッフも多くの準備を行う．たとえば，競技施設の整備，競技日程と対戦順序の決定，選手や観客の宿泊施設から競技場までの移動手段，他にも多くのことを事前に検討する必要があるが，このような場面において，オペレーションズ・リサーチが役に立つ．

本稿では，試合の日程，対戦順序，競技施設の割り当てといったスケジュールに関する課題を取り扱う．スポーツ競技における試合日程，対戦順序，競技施設の割り当てなどをうまく決定し，質の良いスケジュールを作成する分野は，スポーツスケジューリングと呼ばれており，盛んに研究がなされている．多くの研究成果をまとめたものとして，Knust のウェブサイト [1]，Kendall et al. [2]，Rasmussen and Trick [3]，Ribeiro [4] などの論文があるので，興味のある方はこれらを見ていただきたい．また，個別の事例を取り上げた論文も多くあり，最近出版されたものの一例として，サッカー（チリ [5]，ベルギー [6]，FIFA ワールドカップ 2018 [7]），イタリアのバレーボール [8]，アルゼンチンのバスケットボール [9]，韓国の野球 [10] などの各競技・各国の事例に即したスケジューリング手法が提案されている．

いまほり　しんじ
中央大学理工学部
〒 112–8551 東京都文京区春日 1–13–27
imahori@ise.chuo-u.ac.jp

## 2. 基本的な総当たりリーグ戦

本節では，以下の設定における総当たりリーグ戦を作成する方法を紹介する．

・チーム数 $n$（$n$ は4以上の偶数とする）．
・各チームは他の全チームと1回ずつ試合を行う．
・試合を行う日数 $n-1$．
・各試合日に，全チームがちょうど1回試合を行う（各試合日に $n/2$ 試合が行われる）．

図1に，このようなスケジュールの例を示す．6チームの例では，チームの集合 $\{A, B, C, D, E, F\}$ に対して，5日間にわたり毎日3試合を実施する．スケジュールの表記として，図1（上）のように，各日の試合を記す方法と，図1（下）のように，各チームの各日の対戦相手を記す方法がよく用いられる．

| | |
|---|---|
| 1日目 | (A,F), (B,E), (C,D) |
| 2日目 | (A,D), (B,C), (E,F) |
| 3日目 | (A,B), (C,E), (D,F) |
| 4日目 | (A,E), (B,D), (C,F) |
| 5日目 | (A,C), (B,F), (D,E) |

| | |
|---|---|
| 1日目 | (A,D), (B,E), (C,H), (F,G) |
| 2日目 | (A,E), (B,D), (C,F), (G,H) |
| 3日目 | (A,F), (B,H), (C,E), (D,G) |
| 4日目 | (A,G), (B,C), (D,F), (E,H) |
| 5日目 | (A,H), (B,F), (C,D), (E,G) |
| 6日目 | (A,B), (C,G), (D,E), (F,H) |
| 7日目 | (A,C), (B,G), (D,H), (E,F) |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | F | D | B | E | C |
| B | E | C | A | D | F |
| C | D | B | E | F | A |
| D | C | A | F | B | E |
| E | B | F | C | A | D |
| F | A | E | D | C | B |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | D | E | F | G | H | B | C |
| B | E | D | H | C | F | A | G |
| C | H | F | E | B | D | G | A |
| D | A | B | G | F | C | E | H |
| E | B | A | C | H | G | D | F |
| F | G | C | A | D | B | H | E |
| G | F | H | D | A | E | C | B |
| H | C | G | B | E | A | F | D |

**図 1**　総当たりリーグ戦の例：$n=6$（左），$n=8$（右）

$n$ チームの総当たりリーグ戦を作成する際，各日における $n/2$ 試合の決め方は $(n-1)\times(n-3)\times\cdots\times3\times1$ 通りある．この中から適当なものを選択するということを試合を行う日数（$n-1$ 回）だけ繰り返す方法は，組合せ総数の膨大さと，その中で総当たりリーグ戦の条件を満たす組合せの少なさのため実用的ではない．

ここで紹介する circle method [11] は，偶数チームに対する総当たりリーグ戦を作成する代表的な手法であり，以下のように説明できる（図 2 参照）．まず円を描き，円周上に $n-1$ チームを等間隔に配置するとともに，円の中心にチーム $n$ を配置する．円の中心のチームと円周上の 1 チームを線（図 2 では鉛直な線）で結び，この線に垂直な $(n-2)/2$ 本の平行線で他のチームを 2 チームずつ結ぶ．これらの線で結ばれたチームが 1 日目に対戦する．よって，8 チームに対する circle method の動作を示した図 2（左）によると，1 日目は (A, H)，(B, G)，(C, F)，(D, E) の 4 試合を行う．2 日目以降は円周上のチームを反時計回りに $2\pi/(n-1)$ だけ回転させることで，翌日の $n/2$ 試合を決定できる．表 1 に，circle method によって作成した 8 チームの総当たりリーグ戦のスケジュールを示す．

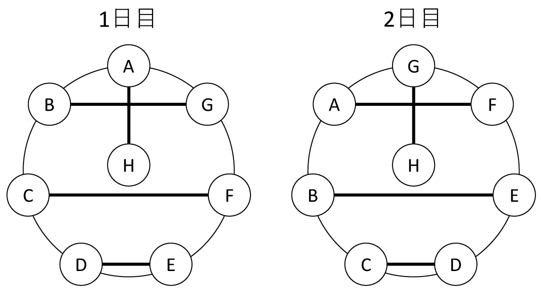


**図 2**　8 チームに対する circle method

**表 1**　circle method で作成したスケジュール ($n=8$)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | H | F | D | B | G | E | C |
| B | G | E | C | A | F | D | H |
| C | F | D | B | G | E | H | A |
| D | E | C | A | F | H | B | G |
| E | D | B | G | H | C | A | F |
| F | C | A | H | D | B | G | E |
| G | B | H | E | C | A | F | D |
| H | A | G | F | E | D | C | B |

チーム数が奇数となる場合には，次の設定の問題を考えることになる．

- チーム数 $n'$（$n'$ は 3 以上の奇数とする）．
- 各チームは他の全チームと 1 回ずつ試合を行う．
- 試合を行う日数 $n'$．
- 各試合日に，$n'-1$ チームが試合を行う（1 チームは試合を行わない）．

この場合は，仮想的な $n=n'+1$ 番目のチームを追加したうえで（この処理によりチーム数が偶数となる），チーム数が偶数の場合の総当たりリーグ戦を作成してから，「チーム $n$ と対戦する＝休み」と定義すると，条件にあった奇数チームの総当たりリーグ戦スケジュールを得ることができる．表 2 は，このようにして作成した 7 チームのスケジュールであり，表中の斜線 (/) は，あるチームがある日に試合を行わないことを表す．

**表 2**　circle method で作成したスケジュール ($n=7$)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | / | F | D | B | G | E | C |
| B | G | E | C | A | F | D | / |
| C | F | D | B | G | E | / | A |
| D | E | C | A | F | / | B | G |
| E | D | B | G | / | C | A | F |
| F | C | A | / | D | B | G | E |
| G | B | / | E | C | A | F | D |

## 3.　本拠地をもつチームのリーグ戦

前節で基本的な総当たりリーグ戦の設計（のための一つの方法）を述べた．これ以降は，基本設定に追加して考慮すべき事項のある場合に，どのようにしてスケジュールを作成するかについて考える．まず本節では，各チームが本拠地をもち，対戦するどちらかのチームの本拠地において試合を行う状況を考える．

自チームの本拠地で行う試合をホーム，相手チームの本拠地で行う試合をアウェイと呼ぶ．国内でも，プロ野球，サッカーの J リーグ，バスケットボールの B リーグなど，多くのプロスポーツ（団体競技）において，どちらかのチームの本拠地で試合が行われるが，たいていの場合はホームで試合を行うチームがやや有利と考えられる．また，さまざまな競技の国際試合においては，「ホームアドバンテージ」と言われるほど，ホームチームが有利と考えられており，これは競技場・気候・食事・時差などの環境への慣れや，ホームチー

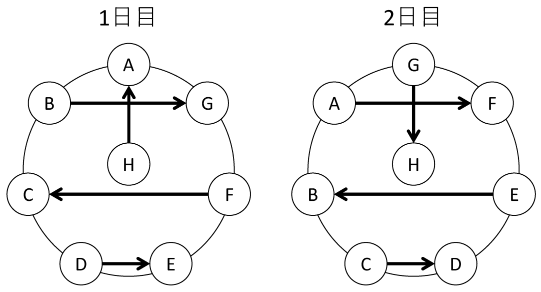


**図 3**　circle method を用いた競技施設の割り当て

**表 3**　ブレーク数最小の総当たりリーグ戦 ($n = 8$)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | H | F | D | B | G | E | C |
| B | G | E | C | A | F | D | H |
| C | F | D | B | G | E | H | A |
| D | E | C | A | F | H | B | G |
| E | D | B | G | H | C | A | F |
| F | C | A | H | D | B | G | E |
| G | B | H | E | C | A | F | D |
| H | A | G | F | E | D | C | B |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | h | a | h | a | h | a | h |
| B | a | h | a | h | a | h | h |
| C | h | a | h | a | h | a | a |
| D | a | h | a | h | h | a | h |
| E | h | a | h | a | a | h | a |
| F | a | h | h | a | h | a | h |
| G | h | a | a | h | a | h | a |
| H | a | h | a | h | a | h | a |

ムに対する応援などが要因となっている．

このような状況のため，本拠地をもつチームの総当たりリーグ戦を作成する際には，前節で述べた対戦相手の決定のほかに，各試合をどちらのチームの本拠地で行うかという競技施設の割り当てを適切に決定する必要が生じる．ここで，ホームとアウェイの試合数を全チームで（できる限り）公平にすることがまず満たすべき条件とされ，さらに，ホームとアウェイの出現の仕方にも配慮することが求められる．

スポーツスケジューリング分野では，ホームゲームもしくはアウェイゲームが 2 試合以上連続することを「ブレーク」と呼び，できるだけブレークの少ないスケジュールを作成したいという要求が生じることがある．この要求には，前節で紹介した circle method を利用して，次のように応えることができる．まず，中心のチームと円周上のチームを結ぶ線を矢印に変え，この向きを試合日毎に反転する．そのほかの $(n-2)/2$ 本の平行な線は，方向が互い違いになるように矢印の向きを決める（これらの矢印は途中で向きを変えない）．矢印で結ばれたチームの対戦において，矢印の元のチームが矢印の先のチームの本拠地を訪れて試合を行う．circle method における矢印の向きを図 3 に示し，この方法で作成した 8 チームのスケジュールと競技施設の割り当てを表 3 に示す．

ここで，表 3（左）は，これまでと同様に各チームの各日の対戦相手を表し，表 3（右）はホーム (h) とアウェイ (a) のどちらの試合であるかを表す（枠で囲った部分がブレークを表す）．circle method を用いて生成したスケジュールでは，2 チーム（表 3 では A と H）はブレークをもたず，それ以外の $n-2$ チームはちょうど 1 つのブレークをもつ．このスケジュールがあらゆる総当たりリーグ戦のスケジュールの中でブレーク数最小であることは，ブレークをもたないホームとアウェイの並び（ホームアウェイパターンと呼ばれる）は 2 つしかなく，異なるチームが同一のホームアウェイパターンをもつことはできないことから示すことができる．なお，このスケジュールを 2 日目から開始し，1 日目の対戦を最終日に実施すると，すべてのチームがちょうど 1 つのブレークをもつように変形することができ，チーム間の公平性の観点でより好ましいスケジュールとなる．

## 4. 対戦順序を考慮するリーグ戦

総当たりリーグ戦では，各チームは自チーム以外のすべてのチームとちょうど 1 回対戦する．このことから，他のチームとどのような順序で対戦を行うかは重要でないと思われるかもしれないが，対戦順序によってあるチームが有利になったり不利になったりすることがある．たとえば，サッカーやラグビーの試合は肉体的な消耗が激しく，強い（もしくは当たりが激しい）チームと対戦した次の試合では疲労や怪我のため十分な力を発揮できないかもしれない．本節では対戦順序が重要となる状況における総当たりリーグ戦のスケジュール作成について考える．

まず，表 4 の二つのスケジュール（チーム数 $n = 8$）を見ていただきたい．表 4（左）は circle method によって生成したスケジュール，表 4（右）は別の方法で生成したスケジュールであり，どちらも総当たりリーグ戦の条件を満たしているが，対戦順序を考慮する場合どちらのスケジュールが好ましいだろうか．

リーグ戦における対戦順序の観点での公平性を評価する指標として，Russell [12] の提案した carry-over effect が知られている．あるチームが，チーム $i$ との対戦の直後にチーム $j$ と対戦するとき，「チーム $i$ がチーム $j$ に carry-over effect を与える」とし，この回数を $c_{ij}$ と表す（$c_{ij}$ を行列としてまとめたものを図 4 に示す）．ただし，同一のスケジュールが周期的に続くと考え，最終日の直後を 1 日目としている．

図 4 から分かるように，circle method で作成したスケジュールは，carry-over effect が著しく偏ってい

**表 4** チーム数 8 の 2 つのスケジュール：circle method（左），balanced schedule（右）

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | H | F | D | B | G | E | C |
| B | G | E | C | A | F | D | H |
| C | F | D | B | G | E | H | A |
| D | E | C | A | F | H | B | G |
| E | D | B | G | H | C | A | F |
| F | C | A | H | D | B | G | E |
| G | B | H | E | C | A | F | D |
| H | A | G | F | E | D | C | B |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | D | E | F | G | H | B | C |
| B | E | D | H | C | F | A | G |
| C | H | F | E | B | D | G | A |
| D | A | B | G | F | C | E | H |
| E | B | A | C | H | G | D | F |
| F | G | C | A | D | B | H | E |
| G | F | H | D | A | E | C | B |
| H | C | G | B | E | A | F | D |

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\
5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\quad
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

**図 4** carry-over effect の比較：circle method（左），balanced schedule（右）

る．Miyashiro and Matsui [13] は，circle method で作成したスケジュールが，あらゆるスケジュールの中で carry-over effect が最も偏ると予想し，この予想は 2018 年に Lambrechts et al. [14] によって肯定的に証明された．一方で，表 4（右）に示したスケジュールは balanced schedule と呼ばれ，carry-over effect の観点で非常に美しいものである．ただし，balanced schedule についてはまだ分かっていないことが多くあり，チーム数が 2 のべき乗の場合や $n = 20$ の場合など，限られた状況のみ carry-over effect が均一なスケジュールが知られている [12, 15].

## 5. 競技施設の少ないリーグ戦

ここまでは，各試合日に（チーム数が奇数の場合は 1 チームを除く）すべてのチームが試合を行うリーグ戦を考えてきた．本節では，各試合日に，試合を行うチームと行わない（休む）チームがある状況でのリーグ戦を考える．具体的には，チーム数 $n$ に対して競技施設の数 $c$ が不足 ($c < \lfloor n/2 \rfloor$) する状況における総当たりリーグ戦のスケジュール作成法を紹介する．

はじめに本節で取り扱うスケジュールを表 5 に示す．表 5（左）は，標準的な（チーム数 $n$ が偶数，競技施設数 $c = n/2$）スケジュールの例であり，全チームが全試合日に試合を行う．表 5（右）は，本節で対象とする，チーム数に対して競技施設数が不足する状況でのスケジュール例であり，各試合日に試合と休みが現れる．競技施設が $c$ 箇所あるため，各試合日に $2c$ チームが試合を行い，$(n - 2c)$ チームは休む（$n(n-1)$ が $2c$ で割り切れない場合，最終日のみ試合数が少なくなる）．

**表 5** 6 チームの総当たりリーグ戦：$c = 3$（左），2（右）

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | F | D | B | E | C |
| B | E | C | A | D | F |
| C | D | B | E | F | A |
| D | C | A | F | B | E |
| E | B | F | C | A | D |
| F | A | E | D | C | B |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | F | | D | | B | E | C | |
| B | E | | C | | A | D | F | |
| C | | D | B | E | F | | A | |
| D | | C | A | F | | B | | E |
| E | B | F | | C | | A | | D |
| F | A | E | | D | C | | B | |

このようなスケジュールの評価指標の一つとして試合と休みのバランスが考えられる．リーグ戦における試合と休みのバランスの重要さは，昨年のラグビーワールドカップに対する報道で何度も耳にしたため，簡単に振り返ることにする．

ラグビーワールドカップの予選では，5 チームの総当たりリーグ戦を行うが，2019 年のワールドカップでは，アイルランド，サモア，スコットランド，ロシアと共に日本は予選プール A に割り当てられた．予選プール A の全 10 試合の日程は以下の通りである．

9 月 20 日（金）　日本 - ロシア．
9 月 22 日（日）　アイルランド - スコットランド．
9 月 24 日（火）　サモア - ロシア．
9 月 28 日（土）　日本 - アイルランド．
9 月 30 日（月）　スコットランド - サモア．
10 月 3 日（木）　アイルランド - ロシア．
10 月 5 日（土）　日本 - サモア．
10 月 9 日（水）　スコットランド - ロシア．
10 月 12 日（土）　アイルランド - サモア．
10 月 13 日（日）　日本 - スコットランド．

まず，すべての試合が異なる日に行われるという特徴がある．そして，ホスト国である日本は試合と休みのバランスが良い（試合の間隔が中 6 日もしくは中 7 日と均一になっている）のに対して，他のチームは試合間隔が短い（最短で中 3 日；ラグビーという競技の性質を考慮すると非常に短い）対戦が含まれていることが確認できる．2015 年のラグビーワールドカップでも同様の偏りがあったため，あえてバランスを崩しているとも考えられるが，以下では試合と休みのバランス

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | F | D | B | G | E | C |
| B | G | E | C | A | F | D | |
| C | F | D | B | G | E | | A |
| D | E | C | A | F | | B | G |
| E | D | B | G | | C | A | F |
| F | C | A | | D | B | G | E |
| G | B | | E | C | A | F | D |

| | |
|---|---|
| 1日目 | (B,G), (C,F), (D,E) |
| 2日目 | (A,F), (B,E), (C,D) |
| 3日目 | (A,D), (B,C), (E,G) |
| 4日目 | (A,B), (C,G), (D,F) |
| 5日目 | (A,G), (B,F), (C,E) |
| 6日目 | (A,E), (B,D), (F,G) |
| 7日目 | (A,C), (D,G), (E,F) |

| | |
|---|---|
| 1日目 | (B,G), (C,F) |
| 2日目 | (D,E), (A,F) |
| 3日目 | (B,E), (C,D) |
| 4日目 | (A,D), (B,C) |
| 5日目 | (E,G), (A,B) |
| 6日目 | (C,G), (D,F) |
| 7日目 | (A,G), (B,F) |
| 8日目 | (C,E), (A,E) |
| 9日目 | (B,D), (F,G) |
| 10日目 | (A,C), (D,G) |
| 11日目 | (E,F) |

**図 5** 単純な方法で作成したスケジュール $(n = 7, c = 2)$

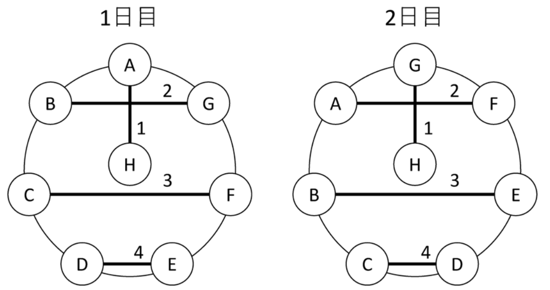


**図 6** 優先順位付き circle method の例 $(n = 8)$

が良いスケジュールの作成について考える．

簡単のため，$n(n-1)$ が $2c$ で割り切れない場合，リーグ戦の最終日は考えないことにする．こうすると，連続する $k$ 日で，各チームは平均 $2ck/n$ 回の試合を行う．全チームが全期間において，この回数に近い試合を行うスケジュール（具体的には，全チームが任意の連続する $k$ 日で，$\lfloor 2ck/n - \varepsilon \rfloor$ 回以上，$\lceil 2ck/n + \varepsilon \rceil$ 回以下（$\varepsilon$ は可能な限り小さな正の数）試合を行うスケジュール）をバランスの良いスケジュールと呼ぶ．なお，ある $n$ と $c$ の組合せに対して，$\varepsilon$ を $0$ にすることは不可能であることが示せる．

本節で求めるスケジュールを作成する単純な方法として，次の方法が思い浮かぶ．まず，与えられたチーム数 $n$ に対して，競技施設数 $c' = \lfloor n/2 \rfloor$ として総当たりリーグ戦を作成する．次に，このスケジュールの早い試合日から順に $c$ 試合ずつ選ぶことで，競技施設数 $c$ のスケジュールを作成する．図 5 は，$n = 7, c = 2$ の例であり，（左）は $n = 7, c' = 3$ のスケジュール，（中）は各試合日の試合一覧，（右）は図 5（中）のスケジュールの早い日（同じ日では左）から順に 2 試合ずつ選んだ $n = 7, c = 2$ のスケジュールを表す．

この方針に基づくとすべての対戦がちょうど 1 度ずつ現れるスケジュールを作成することができる．試合と休みのバランスは，連続する $k$ 日での試合数が，$n$ が偶数の場合，$\lfloor 2ck/n - (n-2)/n \rfloor$ 以上，$\lceil 2ck/n + (n-2)/n \rceil$ 以下，$n$ が奇数の場合，$\lfloor 2ck/(n-1) - 2(n-2)/(n-1) \rfloor$ 以上，$\lceil 2ck/(n-1) + (n-3)/(n-1) \rceil$ 以下となり，試合と休みのバランスの面で改善の余地が残る．さらに，ある試合日に同一チームが 2 試合同時に戦う可能性（図 5（右）の 8 日目に注目）も大きな問題となる．以下では，これらの問題点を解決する設計手法をチーム数の偶奇に分けて紹介する．

### 5.1 チーム数が偶数の場合のスケジュール

チーム数 $n$ と競技施設数 $c' = n/2$ に対するスケジュール作成には circle method を用いる．circle method で対戦相手を決める各辺に図 6 のように番号（優先順位）を付与すると，次の特徴をもつ優先順位付きスケジュールを作成できる：あるチームが $i$ 日目に優先順位 $j$ の試合を行うとき，$i+1$ 日目の試合の優先順位は $\{j-1, j, j+1\}$ のいずれかである．このスケジュールのすべての試合を，試合日の順に（同一日の試合は優先順位を用いて）一列に並べると，各チームの試合がバランスよく現れる．この列の前から順に $c$ 試合ずつ選ぶことを繰り返すことで，以下の性質をもつ偶数チーム数 $n$，競技施設数 $c$ の総当たりリーグ戦スケジュールを作成できる．

- すべての対戦が 1 度ずつ現れる．
- どのチームも 1 日に 2 試合以上行わない．
- 任意の連続する $k$ 日において，各チームは $\lfloor 2ck/(n+2) \rfloor$ 回以上，$\lceil 2ck/(n-2) \rceil$ 回以下の試合を行う．
- 任意の連続する $k$ 日，任意のチームの組 $\alpha, \beta$ に対し，$\alpha$ と $\beta$ の試合数は高々 2 異なる．

### 5.2 チーム数が奇数の場合のスケジュール

チーム数 $n'$ が奇数（たとえば $n' = 7$）の場合を考える．前節で考えた偶数チーム向け手法の単純な拡張では，図 6 の中央のチーム（「H」）をダミーのチームと考え，このチームとの対戦を休みに置き換えることでスケジュールを作成する．このように作られたスケジュールは次の特徴をもつ．

- すべての対戦が 1 度ずつ現れる．
- どのチームも 1 日に 2 試合以上行わない．
- 任意の連続する $k$ 日において，各チームの試合数は $\lfloor 2ck/(n'+1) - (n'-3)/(n'+1) \rfloor$ 以上，$\lceil 2ck/(n'-3) \rceil$ 以下となる．
- 任意の連続する $k$ 日，任意のチームの組 $\alpha, \beta$ に対し，$\alpha$ と $\beta$ の試合数は最大 3 異なる．

チーム数が偶数の場合と比較すると，試合と休みのバランスが悪くなる．このため，circle method の辺の接続方法と各辺への優先順位の付与法を変更する．

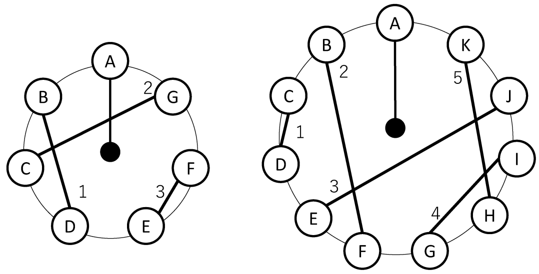


**図 7**　辺の結び方と各辺への優先順序割当

**表 6**　バランスの良いスケジュールの例 $(n' = 11, c = 3)$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | E | B | | K | | F | H | | | C | | D | J | G | | | I |
| B | F | C | | A | | G | | I | | D | | E | K | | H | | J | | |
| C | D | B | | | H | J | | E | | F | | A | I | | K | | | G | |
| D | C | | I | K | | | F | | G | B | J | | | A | | H | E | | |
| E | J | | A | | G | | H | C | | K | | B | | I | | F | D | | |
| F | B | | H | | I | | D | A | | C | | | F | G | | E | | K | |
| G | | I | | J | E | B | | | D | | K | H | | F | | A | | C | |
| H | | K | F | | C | | E | | A | | I | G | | | B | D | | J | |
| I | | G | D | | F | | | B | J | | H | | C | E | | | K | | A |
| J | E | | | G | | C | K | | I | | D | | J | | A | | B | H | |
| K | | H | | D | | A | J | | | E | G | | B | | C | | I | F | |

circle method では，（休みに相当する）中心のチームを円周上のチームと線で結んだ後，この線に垂直な $(n'-1)/2$ 本の平行線によって対戦相手を決定した．この $(n'-1)/2$ 本の平行線の集合は，組合せデザインの世界では patterned starter と呼ばれるものに相当する．$(n'-1)$ チームを無作為に 2 チームずつ結ぶと，円周上のチームを回転するうちに，同じ対戦が 2 度以上現れるが，これが起こらないもの（starter と呼ばれる）が複数存在する [15]．図 7 のように，適切な starter と各辺への適切な優先順位の付与（$i$ 日に優先順位 $j$ で試合を行うと，$i+1$ 日に優先順位 $\{j-1, j, j+1, j+2\}$ のいずれかで試合を行うか，$i+1$ 日は休み，$i+2$ 日に優先順位 $\{j-c'+1, j-c'+2\}$ で試合を行う，という性質）を満たすとき，バランスの良いスケジュールとなる（表 6 にスケジュールの一例を示す）．

## 参考文献

[1] S. Knust, Classification of literature on sports scheduling, http://www2.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/sportssched/sportlit_class/（2019 年 12 月 3 日閲覧）

[2] G. Kendall, S. Knust, C. C. Ribeiro and S. Urrutia, “Scheduling in sports: An annotated biliography,” *Computerns & Operations Research*, **37**, pp. 1–19, 2010.

[3] R. V. Rasmussen and M. A. Trick, “Round robin scheduling:—A survey,” *European Journal of Operational Research*, **188**, pp. 617–636, 2008.

[4] C. C. Ribeiro, “Sports scheduling: Problems and applications,” *International Transactions in Operational Research*, **19**, pp. 201–226, 2012.

[5] F. Alarcón, G. Durán, M. Guajardo, J. Miranda, H. Muñoz, L. Ramírez, D. Sauré, M. Siebert, S. Souyris, A. Weintraub, R. Wolf-Yadlin and G. Zamorano, “Operations research transforms the scheduling of Chilean soccer leagues and South American World Cup Qualifiers,” *INFORMS Journal on Applied Analytics*, **47**, pp. 52–69, 2017.

[6] D. Goossens, “Optimization in sports league scheduling: Experineces from the Belgian Pro Leargue soccer,” In *Operations Research and Enterprise Systems*, pp. 3–19, 2018.

[7] G. Durán, M. Guajardo and D. Sauré, “Scheduling the South American Qualifiers to the 2018 FIFA World Cup by integer programming,” *European Journal of Operational Research*, **262**, pp. 1109–1115, 2017.

[8] G. Cocchi, A. Galligari, F. P. Nicolino, V. Piccialli, F. Schoen and M. Sciandrone, “Scheduling the Italian national volleyball tournaments,” *INFORMS Journal on Applied Analytics*, **48**, pp. 271–284, 2018.

[9] G. Durán, S. Durán, J. Marenco, F. Mascialino and P. A. Rey, “Scheduling Argentina’s professional basketball leagues: A variation on the travelling tournament problem,” *European Journal of Operational Research*, **275**, pp. 1126–1138, 2019.

[10] T. Kim, “Optimal approach to game scheduling of multiple round-robin tournament: Korea professional baseball league in focus,” *Computers & Industrial Engineering*, **136**, pp. 95–105, 2019.

[11] T. P. Kirkman, “On a problem in combinations,” *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, **2**, pp. 191–204, 1847.

[12] K. G. Russell, “Balancing carry-over effects in round robin tournaments,” *Biometrika*, **67**, pp. 127–131, 1980.

[13] R. Miyashiro and T. Matsui, “Minimizing the carry-over effects value in a round-robin tournament,” In *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling*, edited by E. K. Burke and H. Rudová, pp. 460–463, 2006.

[14] E. Lambrechts, A. M. C. Ficker, D. R. Goossens and F. C. R. Spieksma, “Round-robin tournaments generated by the circle method have maximum carry-over,” *Mathematical Programming*, **172**, pp. 277–302, 2018.

[15] I. Anderson, “Balancing carry-over effects in tournaments,” *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series*, **403**, pp. 1–16, 1999.