

1 次の各 にあてはまる数や式を答えなさい。

- (1) $A(3, 4)$, $B(-1, 2)$, $C(1, 2)$ とする. 線分 BC の中点の座標は ア であり, 三角形 ABC の重心の座標は イ である.

- (2) θ は, 不等式 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ を満たすとする. 方程式 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$ を解くと $\theta =$ ウ であり, また, 方程式 $\sqrt{2} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ を解くと $\theta =$ エ である.

- (3) 2つのベクトル $\vec{a} = (2, x)$, $\vec{b} = (3, 6)$ が垂直となるような x の値は オ であり, また, 平行となるような x の値は カ である.

- (4) 実数 k を用いて表されたベクトル $\vec{a} = (k+1, k, 2)$, $\vec{b} = (2, -2k, k)$ に対して, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を k を用いて表すと キ であり, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるような k の値をすべて挙げると ク となる.

- (5) 実数だけからなるある等比数列について, 第3項が 12, 第6項が -96 であることがわかっている. このとき, 初項は ケ で, 公比は コ である.

2 $4 \leq x \leq 16$ を定義域とする関数

$$f(x) = (\log_2 x)^2 - 5 \log_2 2x + 11$$

について、次の各問いに答えなさい。

- (1) $t = \log_2 x$ とおいたとき、 $f(x)$ を t を用いて表しなさい。
- (2) $4 \leq x \leq 16$ の範囲での、(1) で定めた t の値域を求めなさい。
- (3) $f(x)$ の最小値、およびそのときの x の値を求めなさい。
- (4) $f(x) = \frac{3}{4}$ となるような x の値を求めなさい。
- (5) $f(x)$ の最大値、およびそのときの x の値を求めなさい。

5

3

2つの放物線

$$C_1: y = x^2 + 1,$$

$$C_2: y = x^2 - 12x + 25$$

と、これらの放物線のいずれにも接する直線 l がある。このとき、次の各問に答えなさい。

- (1) 放物線 C_1 と C_2 の交点の座標を求めなさい。
- (2) a を定数とする。放物線 C_1 に $x = a$ で接する直線 m の方程式を求めなさい。
- (3) 直線 l の方程式を求めなさい。
- (4) 放物線 C_1 と放物線 C_2 および直線 l で囲まれてできる図形の面積を求めなさい。

6

7

1

(1) ア

(0, 2)

イ

$\left(1, \frac{8}{3}\right)$

(2) ウ

$\frac{55}{42}\pi$

エ

$\frac{5}{4}\pi, \frac{17}{12}\pi$

(3) オ

-1

カ

4

(4) キ

$-2k^2 + 4k + 2$

ク

$1 \pm \sqrt{2}$

(5) ケ

3

コ

-2

2

(1) $4 \leq x \leq 16$ において, $t = \log_2 x$ とおくと,

$$f(x) = (\log_2 x)^2 - 5(\log_2 2 + \log_2 x) + 11 = t^2 - 5(1+t) + 11 = \underline{t^2 - 5t + 6}.$$

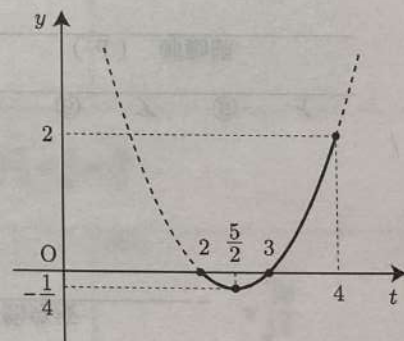
(2) $t = \log_2 x$ は単調に増加する関数である. したがって, t のとる最小値は $\log_2 4 = 2$ で, 最大値は $\log_2 16 = 4$ であり, 求める値域は $\underline{2 \leq t \leq 4}$ である.

(3) (1), (2)の結果より $g(t) = t^2 - 5t + 6$ ($2 \leq t \leq 4$) とお

く. $g(t) = (t-2)(t-3) = \left(t - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ である. $y = g(t)$

のグラフを描くと, 右のようになる. よって, $f(x)$ のとる最小値は, 2次関数 $g(t)$ のとる最小値と等しく $\underline{-\frac{1}{4}}$ で, そ

のとき $t = \frac{5}{2}$, つまり $\log_2 x = \frac{5}{2}$, つまり $x = 2^{\frac{5}{2}} = \underline{4\sqrt{2}}$ である.



(4)

$$f(x) = \frac{3}{4}$$

$$\iff g(t) = \frac{3}{4}$$

$$\iff t^2 - 5t + 6 = \frac{3}{4}$$

$$\iff t^2 - 5t + \frac{21}{4} = 0 \quad (\nearrow)$$

$$(\nearrow) \iff \left(t - \frac{3}{2}\right) \left(t - \frac{7}{2}\right) = 0$$

$$\iff t = \frac{7}{2} \quad (\because 2 \leq t \leq 4)$$

$$\iff \log_2 x = \frac{7}{2}$$

$$\iff x = 2^{\frac{7}{2}} = \underline{8\sqrt{2}}.$$

(5) $f(x)$ のとる最大値は, 2次関数 $g(t)$ のとる最大値と等しい. (3)で描いたグラフより, 求める最大値は $g(4) = 16 - 20 + 6 = \underline{2}$ で, そのとき $t = 4$, つまり $\log_2 x = 4$, つまり $x = 2^4 = \underline{16}$ である.

3

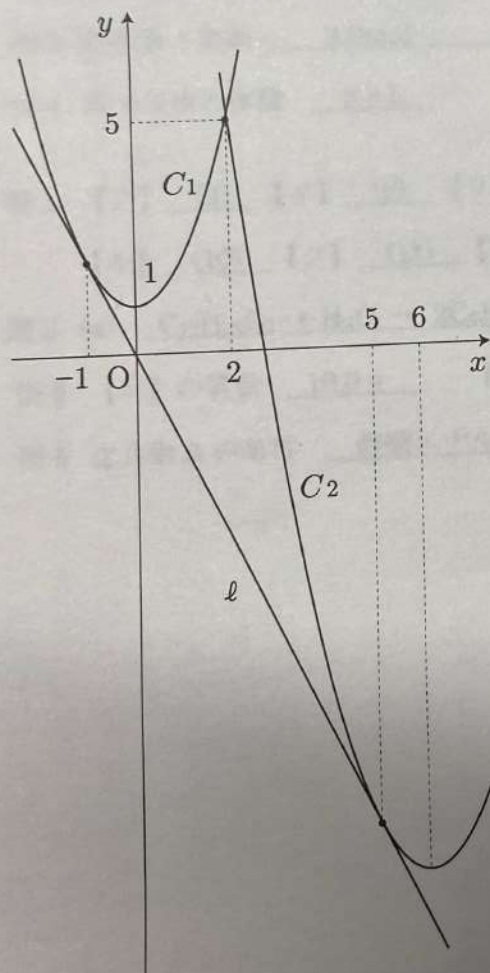
(1) $x^2 + 1 = x^2 - 12x + 25 \iff 12x = 24 \iff x = 2$. $x = 2$ のとき $y = 5$. $(2, 5)$.

(2) $C_1: y = x^2 + 1, y' = 2x$. 求める直線 m は, C_1 の $x = a$ に対応する点における接線で, その方程式は, $y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$, つまり $y = 2ax - a^2 + 1$ である.

(3) $C_2: y = x^2 - 12x + 25, y' = 2x - 12$. C_2 の $x = b$ に対応する点における接線の方程式は, $y - (b^2 - 12b + 25) = (2b - 12)(x - b)$, つまり $y = (2b - 12)x - b^2 + 25$ である. これと (2) の結果の直線 m が一致するための必要十分条件は, 係数を比較して $2a = 2b - 12$ かつ $-a^2 + 1 = -b^2 + 25$ である. この a と b の連立方程式を解いて $a = -1, b = 5$ を得る. したがって, 直線 ℓ の方程式は, $y = -2x$ である.

(4)

左図のように $-1 < x < 2$ のとき ℓ は C_1 の下方に位置し, $2 < x < 5$ のとき ℓ は C_2 の下方に位置する. したがって, 求める面積は,



$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \{x^2 + 1 - (-2x)\} dx \\ & + \int_2^5 \{x^2 - 12x + 25 - (-2x)\} dx \\ & = \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_2^5 (x^2 - 10x + 25) dx \\ & = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 25x \right]_2^5 \\ & = \frac{1}{3} [x^3]_{-1}^2 + [x^2]_{-1}^2 + [x]_{-1}^2 \\ & \quad + \frac{1}{3} [x^3]_2^5 - 5 [x^2]_2^5 + 25 [x]_2^5 \\ & = \frac{1}{3} \{8 - (-1)\} + (4 - 1) + \{2 - (-1)\} \\ & \quad + \frac{1}{3} (125 - 8) - 5(25 - 4) + 25(5 - 2) \\ & = \underline{18} \end{aligned}$$

である.