

群論 問題

■お試し問題(2問解答して1000円の報酬)

1.

次の集合と演算の組み合わせで、群にならないものを選択し、なぜならないかを論ぜよ。ただし、 $2\mathbb{Z}$ は、偶数全体の集合とします。

(1) $(\mathbb{R}, \times)$ (2) $(\mathbb{Q}, +)$ (3) $(2\mathbb{Z}, +)$ (4) $(2\mathbb{Z}, \times)$

2.

G を群とし、 $H \subset G$ とします。

$$(1) a, b \in H \Rightarrow ab \in H \quad (2) a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$$

の両方が成立することと

$$(3) a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

が成立することが、必要十分であることを示してください。

本番一全 17 問

1

次の集合と演算の組み合わせで、群にならないものを選択し、なぜならないかを論ぜよ。

(1) $(\mathbb{Z}, -)$ (2) $(\mathbb{Z}, +)$ (3) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ (4) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$

2

対称群 S_5 は、 S_5 の元 $\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\sigma = (1\ 2)$ で生成されることを示してください。

3

集合 $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ は演算 $(a, b) \circ (c, d) = (ac, cb + d)$ で群になることを示してください。

4

$\mathbb{Z}$ 上の通常の積は、集合 $G = \{x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ は、結合律を満たしますか？また、単位元・逆元は存在しますか？

5 群 G において $(ab)^2 = a^2b^2$ ならば、 $ab = ba$ であることを示して下さい。

6. 部分群

群 G に対して、 $N_G(S) := \{g \in G \mid S \subset G, gS = Sg\}$ は、 G の部分群であることを示して下さい。

7. 部分群

群 G に対して、 $N_G(S) := \{g \in G \mid S \subset G, gS = Sg\}$ は、 G の部分群であることを示して下さい。

8. 部分群 $H \leq G$ の指数 $[G : H] = 2$ ならば、 $H \triangleleft G$ を示してください。

9.

4 次の交代群 $\mathfrak{A}_4$ には、位数 6 の部分群が存在しないことを示してください。

1 0. アーベル群

群 G, H に対して、 $G \simeq H$ であり、 G がアーベル群であるなら、 H もアーベル群になることを示して下さい。

1 1. アーベル群

群 G の任意の元 a に対し、 a^2 が単位元ならば、 G はアーベル群であることを示して下さい。

1 2. 正規化群・正規部分群

4. 群 G に対して、 $H \leq G, N \triangleleft G$ とします。このとき、 H は、正規化群 $N_G(H)$ の正規部分群であることを示して下さい。

1 3. 同型写像

群 G, H に対して $f: G \rightarrow H$ を同型写像とします。 $N \triangleleft G$ ならば、 $f(N) \triangleleft H$ を示して下さい。

1 4. 準同型写像

$f: G \rightarrow G'$ を群の準同型写像、群 G, G' の単位元をそれぞれ $1, 1'$ とします。このとき、 f が単射であることと、核 $\ker(f) = \{1\}$ が必要十分であることを示して下さい。

1 5. 標準全射準同型

G を群、 $N \triangleleft G$ 、 f を標準全射準同型とします。 $\ker(f) = N$ を示して下さい。

1 6.

G を群とし、 $H, K, L \leq G$ かつ $H \subset L$ とします。 $(HK) \cap L = H(K \cap L)$ を示して下さい。

1 7.

G を群として、 $H, K \leq G$ とします。写像 $\varphi: H \times K \rightarrow G$ を $\varphi(x, y) = xy$ とします。

φ が同型写像であることと次の(1)～(3)がすべて成り立つことが必要十分であることを示してください。

(1) $x \in H, y \in K \Rightarrow xy = yx$

(2) $H \cap K = \{e\}$

(3) $G = HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$

←