

第 1 2 章 摂動法と応用

1 2 . 1 共振器の摂動法

1 2 . 1 . 1 形状が僅か変化した場合の共振周波数の変化

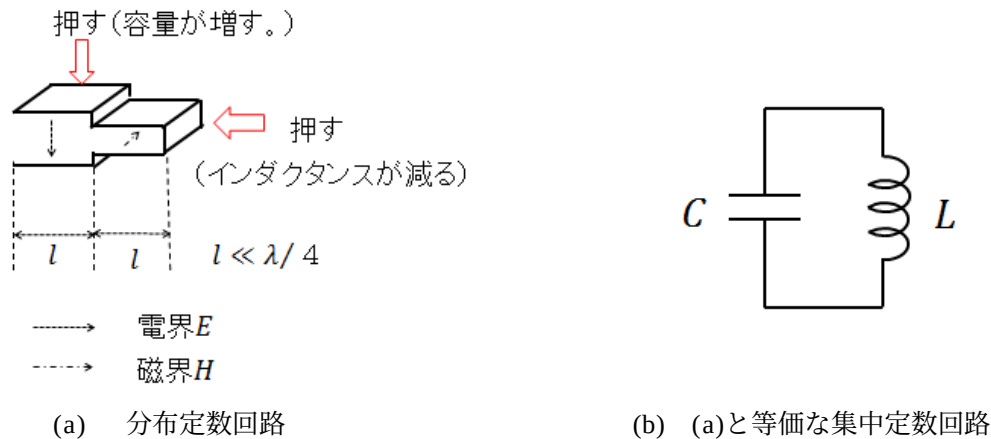


図 1 容量 C とインダクタンスが並列共振した分布定数回路(a)と等価な集中定数回路図(b)

図 1 (a)で解るように上下の平行板を上から押すと間隔が狭くなるから(b)図の静電容量 C が増すので共振周波数は減少する。又(a)図の上下の板の間には磁界が終端短絡板に平行な磁界があり(a)図の様に右から左に押すと磁界の数が減るからインダクタンスは減少し、共振周波数は高くなる。つまり電界の多い場所を中に押すと共振周波数は低くなり、磁界の多い場所を中に押すと共振周波数はたくなる。この場合、形状の僅かな変化に対する共振周波数の変化を求める場合の手法を、摂動法と呼ぶ。図 1 の場合は簡単であるが一般に図 2 の様な場合には (1) 式の結果となる。これはマクスウェル方程式から求めるのが便利でありその手順も以下に示した。

図 2 一般の形状で電界及び磁界の強い場所を夫々押す図

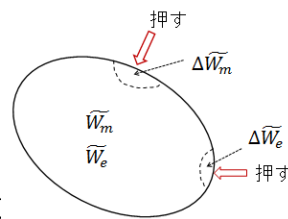


図 2 の様に磁気エネルギーのある所を面に垂直
また電気エネルギーのある所を面に垂直に押すことに寄り電気エネルギーが ΔW_e 減少する。この事により共振角周波数 ω_0 が $\omega_0 + \Delta\omega$ 変化したとするとその量は(1)式で表せる

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\tilde{W}_m - \Delta\tilde{W}_e}{\tilde{W}_t} \quad (1)$$

押す前の $\tilde{W}_t$ は共振器内の全リアクティヴエネルギーの時間平均値

[証明] 変形する前の共振器内の共振角周波数を ω_0 とすし、次に変形後の共振角周波数を $\omega_0 + \delta\omega$ とする。また変形以前に於いて変形する部分に含まれる磁界のエネルギーの時間

平均値を $\Delta \widetilde{\omega}_m$, 電界のエネルギーの時間平均値を $\Delta \widetilde{\omega}_e$ とする。

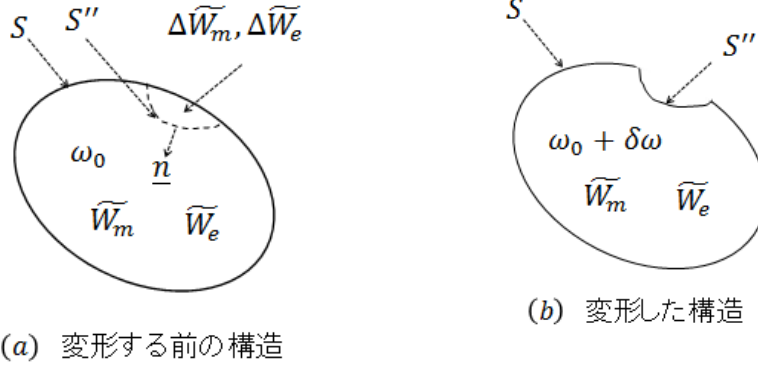


図3 空洞共振器の形状変形による周波数のずれを摂動理論で求める説明図

図3(a)に於いて S'' 面から共振器の外側（ $-\underline{n}$ 方向）に向かうポインティング電力が角周波数が ω_0 で P'' であつた値が $\omega_0 + \delta\omega$ の角周波数ではゼロにならなければならない。理由は変形の構造では S'' 面は金属面になるからである。変形時に S'' 面で S'' から内側に向かう（図3の $\underline{n}$ 方向）ポインティング電力 $-P''$ が発生しなければならない。さてポインティング電力 P'' は(a)式の値を有する。（小西、“実用マイクロ波技術講座第1巻、p.233,(16)式”で損失項をゼロとする,また p.258 の Z の値を用いる、これは入力電流が1アンペアの場合はポインティング電力になるからである）

$$P'' = j2\omega(\Delta \widetilde{W}_m - \Delta \widetilde{W}_e) \quad (a)$$

故に $-P''$ は(b)式を有する。

$$-P'' = -j2\omega(\Delta \widetilde{W}_m - \Delta \widetilde{W}_e) \quad (b)$$

一方角周波数の変化 $\delta\omega$ による P'' の変化 $\delta P''$ は(c)式になる。（小西、“実用マイクロ波技術講座第1巻、p.253,(1-c) 式または p.255,(12-a) 式の両辺に $\delta\omega$ を乗ずれば得られる。）

$$\delta P'' = j2\delta\omega(\widetilde{W}_m + \widetilde{W}_e) \quad (c)$$

故に

$$-\delta P'' = -j2\delta\omega(\widetilde{W}_m + \widetilde{W}_e) \quad (d)$$

(b)式と(d)式は同じ値でなければならないから(e)式を得る。

$$\begin{aligned} \omega(\Delta \widetilde{W}_m - \Delta \widetilde{W}_e) &= \delta\omega(\widetilde{W}_m + \widetilde{W}_e) \\ \frac{\delta\omega}{\omega} &= \frac{\Delta \widetilde{W}_m - \Delta \widetilde{W}_e}{\widetilde{W}_m + \widetilde{W}_e} = \frac{\Delta \widetilde{W}_m - \Delta \widetilde{W}_e}{\widetilde{W}_t} = \frac{\Delta \widetilde{W}_m - \Delta \widetilde{W}_e}{2\widetilde{W}_m} \end{aligned} \quad (e)$$

1 2 . 1 . 2 共振器内の誘電体の比誘電率が及び磁性体の比透磁率が変化した場合の共振周波数の変化

図1の容量部分の比誘電率を増すと、容量が増し角周波数は減少する。又誘導性の中の比透磁率を増してもインダクタンスが増加してやはり角周波数は減少する。この角周波数の変化が少ない場合は摂動法で求める事ができ、その方法を以下に述べる。結論は(2)式で示される。

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = - \frac{\Delta\epsilon \cdot c |E_0|^2 + \Delta\mu \cdot c' |H_0|^2}{2\widetilde{W}_t} \quad (2)$$

(2)式で c や c' は比電率や比透磁率の変化する部分の形状による定数で図5に示す。

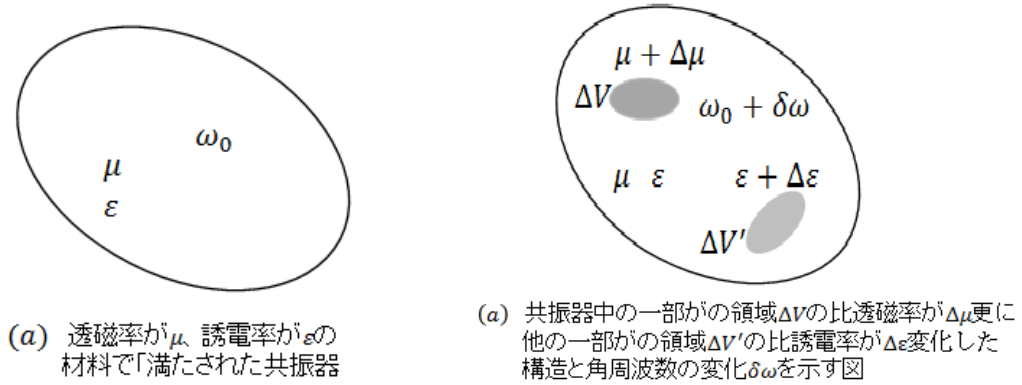


図4 共振器の一部の比透磁率と他の一部の比誘電率が変化した場合の角周波数変化を摂動理論で求める説明図

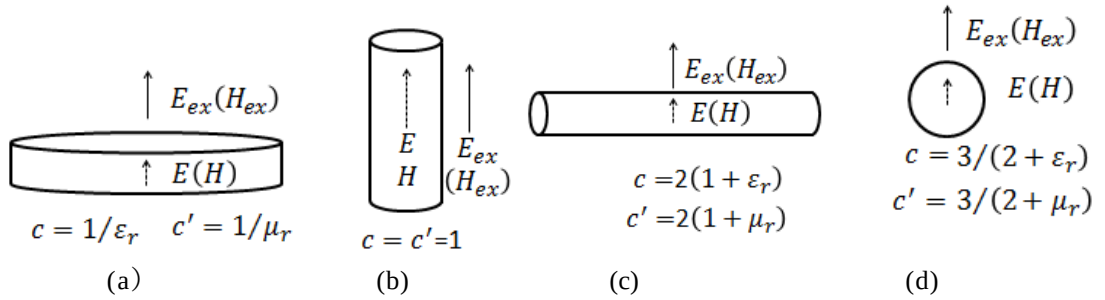


図5 (2)式の c や c' の値（形状により異なる値を取る）

[証明]

マクスウェル方程式は以下の様になる。

$$\nabla \times E_0 = -j\omega_0\mu H_0 \quad (a) \quad \nabla \times H_0 = j\omega_0\epsilon E_0 \quad (b)$$

$$\nabla \times E = -j\omega(\mu + \Delta\mu)H \quad (c) \quad \nabla \times H = j\omega(\epsilon + \Delta\epsilon)E \quad (d)$$

$H \cdot (a)^*$ 及び $E_0^* \cdot (d)$ を求めると

$$H \cdot (\nabla \times E_0)^* = j\omega_0\mu H H_0^* \quad (e)$$

$$E_0^* \cdot \nabla \times H = j\omega(\epsilon + \Delta\epsilon)E_0^* E \quad (f)$$

(f) - (e)を求めると(g)式を得る。

$$E_0^* \cdot \nabla \times H - H \cdot \nabla \times E_0^* = j\omega(\epsilon + \Delta\epsilon)E_0^* E - j\omega_0\mu H H_0^* \quad (g)$$

ベクトルの公式により(g)式は(h)式になる

$$\nabla \cdot (H \times E_0^*) = j \iiint \{ \omega(\epsilon + \Delta\epsilon)E_0^* E - j\omega_0\mu H H_0^* \} d\tau \quad (h)$$

同様に $E \cdot (b)^*$ 及び $H_0^* \cdot (c)$ を求めると(i)(j)式を得る。また(i) - (j)から(k)式を得る。

$$E \cdot (\nabla \times H_0)^* = -j\omega_0\epsilon E_0^* E \quad (i)$$

$$H_0^* \cdot \nabla \times E = -j\omega(\mu + \Delta\mu)H H_0^* \quad (j)$$

$$\nabla \cdot (H_0^* \times E) = j \iiint \{ \omega(\mu + \Delta\mu) H H_0^* - j\omega_0 \varepsilon E_0^* E \} d\tau \quad (k)$$

(h) + (k)で体積積分をしガウスの発散定理を用いると左辺=0となる。その理由は共振器の中の誘電体、磁性体の定数が変化しても関係なく共振器を取囲む周囲の面上では外部に向かうポインティング電力はゼロであるからである。即ち(j)式を満たす。

$$\oint (H \times E_0^* + H_0^* \times E) \cdot \bar{n} ds = 0 \quad (l)$$

故に(h)(k)式の右辺の体積積分の和もゼロである。これから次式を得る。

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = - \frac{\Delta\varepsilon E E_0^* \Delta V + \Delta\mu H H_0^* \Delta V'}{2W_t} \quad (m)$$

(m)で ΔV 及び $\Delta V'$ は誘電体及び磁性体の比誘電率及び比透磁率の変化する部分の体積である。

特に変化する部分の体積が小さい場合には、資料の形状により $c \Delta V$ 及び $c' \Delta V'$ の様に係数が付く。この理由は変化する部分の中に夫々半電場及び半磁場が発生するのでその値が外部電場及び外部磁場を少なくするからである。そこで真に生じる内部の場の値を外部の場で割った定数 c 及び c' を予め求めておけばその値を外部の場の値に乘じる事により必要な内部の場の値が求まる。この定数 c 及び c' を示したのが図5である。例えば図5(a)で面に垂直な電束及び磁束は面の上下で連続である条件から直ちに c 及び c' の値が同図の値になる事が理解できる。また図5(c)はW.R.Smith Static, "Static and Dynamic Electricity," pp.67~68, MacGraw-Hill Book Company, New York"で図5(d)はJ.A.Stratton, Electromagnetic Theory, pp.205~213, MacGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1941で求められている。

以上の事から(m)式の E 及び H の代わりに $E = cE_0$ 及び $H = c'H_0$ を代入すると(n)式が得られる。

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = - \frac{\Delta\varepsilon \cdot c \cdot |E_0|^2 \Delta V + \Delta\mu \cdot c' \cdot |H_0|^2 \Delta V'}{2W_t} \quad (n)$$

これから解る様に誘電率の増加でも透磁率の増加でも共振周波数は低くなることが解る。

1 2. 1. 3 共振器の摂動理論の応用

1 2. 1. 3. 1 材料の定数測定への応用

文献“小西、実用マイクロ波技術講座第4巻、pp.273~280”及び第5巻、pp.134~154に詳しく記載されているので参照されたい。上記の文献では誘電率、透磁率の実部のみならず、損失項 $\tan\delta (= 1/Q)$ も計算されている。

1 2. 1. 3. 2 導波管の遮断周波数を求める

導波管の遮断周波数では、電磁波は伝搬せず断面方向で共振する。故に適当な長さの導波管で共振器を形成する。その共振周波数を摂動法で求める事が出来る。以下に例題を示す。

図6の構造の遮断周波数を求める。(n)式に於いて上下の誘電体板で $c = 1/\varepsilon_r$ いま

$$2W_t = 4W_e = 2ab|E_0|^2 \Delta y = 2a\Delta y \quad \text{である事から}$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = - \frac{(\varepsilon_r' - 1) \Delta y}{\varepsilon_r' b} \quad \text{故に} \quad \omega = \omega_0 (1 + \delta\omega/\omega_0) = \omega_0 \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon_r' - 1) \Delta y}{\varepsilon_r' b} \right\} \quad \text{故に}$$

$$\varepsilon_{ff} \approx 1 + \frac{1}{\varepsilon_r} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r'} \right) \frac{2\Delta y}{b} \approx \varepsilon_{eff} = \frac{1}{(1 - 2\Delta y/b) + 2\Delta y/b\varepsilon_r} \quad (o)$$

この値は第11章の11.2.3. (b)の(13-c)式と同じである。

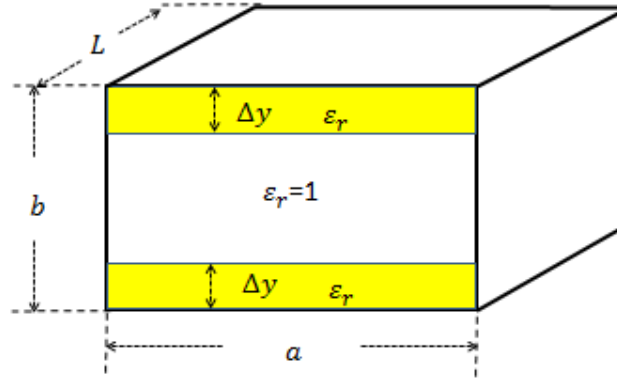


図6 矩形導波管の H 面及び E 面に

12.2 伝搬定数の摂動理論

12.2.1 形状が僅か変化した場合の位相定数

導波管の波の進行方向に垂直な任意の2個の面 S_1, S_2 、は遮断角周波数 ω_c では TE 波では磁氣的壁 TM 波では電氣的壁になる。そして S_1, S_2 で囲まれる部分は遮断角周波数の共振器になる。さて導波管の外壁に僅かな変形があると共振器の摂動で述べた様に、この遮断角周波数 ω_c は $\Delta\omega$ だけ変化しその値は(1)式で示された様(a)式となり位相定数は(b)式となる。

$$\omega = \omega_c + \Delta\omega, \quad \Delta\omega = \frac{\Delta\tilde{W}_m - \Delta\tilde{W}_e}{\tilde{W}_t} \quad (a)$$

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c0} + \Delta\omega}{\omega} \right)^2} \quad (b)$$

故に $\Delta\beta$ は(3)式となる。

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c0} + \Delta\omega}{\omega} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c0}}{\omega} \right)^2} \right\} \quad (3)$$

12.2.2 導波管中に誘電体、磁性体を挿入した場合の位相定数の変化

12.1.2 で述べた様に誘電体や磁性体を挿入する事により遮断角周波数は低くなることが想像できる。然しそれ以外に伝送経路に誘電体磁性体が挿入されることにより伝送速度も遅くなることの影響も受ける。これを求めると(4)式になる。

$$\Delta\beta = \omega \frac{\iint \Delta\epsilon \cdot c \cdot |E|^2 ds + \iint \Delta\mu \cdot c' |H|^2 ds}{\iint (E_0^* \times H + E \times H_0^*) \cdot i_z ds} \quad (4)$$

[(4)の分子の第1項の積分範囲は導波管断面で誘電体の部分で第2項の積分範囲は磁性体の部分を示し分母の積分範囲は導波管断面全体である。]

[証明] 導波管内が最初真空でとすると、12.1.2 の(a)~(d)式に於いて $\mu = \mu_0, \varepsilon = \varepsilon_0$,

$\mu + \Delta\mu = \mu_0 + \mu_0(\mu_r - 1), \varepsilon + \Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)$ とすれば良い。いま記述を簡単にする為に

$$j\omega\mu_0(\mu_r - 1)H = J_m, \quad j\omega\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = J_e$$

とおく事にする。いま電界及び磁界が夫々z方向に夫々

$Ee^{-\gamma z}$ 及び $He^{-\gamma z}$ で変化するものとする

$$\nabla \times (Ee^{-\gamma z}) = e^{-\gamma z} \nabla \times E - \gamma e^{-\gamma z} i_z \times E$$

$$\nabla \times (He^{-\gamma z}) = e^{-\gamma z} \nabla \times H - \gamma e^{-\gamma z} i_z \times H$$

ここで $\nabla \times (aA) = a\nabla \times A - A \cdot \nabla a$ のベクトル公式を用いた。

故に導波管内が真空の場合は

$$\nabla \times H_0 - \gamma(i_z \times H_0) = j\omega\varepsilon_0 E_0 \quad (a)$$

$$\nabla \times E_0 - \gamma(i_z \times E_0) = -j\omega\varepsilon_0 H_0 \quad (b)$$

また内部に材料がある場合には

$$\nabla \times H - \gamma(i_z \times H) = j\omega\varepsilon_0 E + J_e \quad (c)$$

$$\nabla \times E - \gamma(i_z \times E) = -j\omega\varepsilon_0 H - J_m \quad (d)$$

(a)*・E (b)*・(-H) (c)・E₀* (d)・(-H₀*)を加えあわせた後、導波管内の領域に体積積分を
すると

$$\iiint \{(\nabla \times H) \cdot E_0^* - (\nabla \times E_0^*) \cdot H + (\nabla \times H_0^*) \cdot E - (\nabla \times E) \cdot H_0^*\} d\tau \\ - (\gamma + \gamma_0^*) \iiint \{(i_z \times E) \cdot E_0^* + (i_z \times H_0^*) \cdot E\} d\tau = \iiint (J_e \cdot E_0^* + J_m \cdot H_0^*) d\tau$$

下記のベクトル公式 とガウスの発散定理

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B) \quad \iiint \nabla \cdot F dV = \oint F ds$$

を用いると

$$(\gamma + \gamma_0^*) = \frac{j \iint [\Delta\varepsilon \cdot E E_0^* + \Delta\mu \cdot H \cdot H_0^*] dd}{\iint (E_0^* \times H + E \times H_0^*) \cdot i_z} \quad (e)$$

(e)式に於いて損失の無い場合には 12. 1. 2 の(m)式から(m)式を得たと同じ様に
資料の断面が小さい場合には、 $\Delta\varepsilon$ を $\Delta\varepsilon \cdot c$ に、また $\Delta\mu$ を $\Delta\mu \cdot c'$ に変更すれば良い。以上を考慮
して(4)式を得る。

12. 2. 3 伝搬定数の摂動理論の応用

(a) TE₁₀矩形導波管のE面を中に押す

12. 2. 1 の(e)式で $\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\overline{W}_m - \Delta\overline{W}_e}{\overline{W}_t}$ であり E面は電界成分=0でありH面

の磁界成分は上下に等いから中に Δa 押すと $\frac{\Delta\overline{W}_m}{\overline{W}_t} = \frac{\Delta a}{a}$

故に遮断周波数は高くなる。

(b) 位相回路への応用

図6の様に矩形 TE_{10} 導波管の中に途半の進行方向に平行な誘電体板を挿入する。いま、板の幅を Δs とし高さは導波管のE面の高さ b とする。またH面の幅は a とする。(4)式

$$\Delta\beta = \omega \frac{\iint \Delta\varepsilon \cdot c \cdot |E|^2 ds + \iint \Delta\mu \cdot c' |H|^2 ds}{\iint (E_0^* \times H + E \times H_0^*) \cdot i_z ds}$$

に於いてこの例では透磁率の変化はないから $\Delta\mu=0$ となり $\Delta\varepsilon = \varepsilon'_r - 1$ となるので(ダツシは無損失項を示す)。 $\Delta\beta$ は(5)式になる。

$$\Delta\beta = \omega \frac{\iint \Delta\varepsilon \cdot c \cdot |E|^2 dd}{\iint (E_0^* \times H + E \times H_0^*) \cdot i_z dd} \quad (5)$$

いま $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon' - 1)$ 、 図5で $c=1$ (この場合は図7から解る様に、反電場が無いから図5(b)となる。

$H_0 = \frac{E_0}{\eta_{TE}} = \frac{E_0}{\eta / \sqrt{1-(f_c/f)^2}}$, η_{TE} = TE波の特性界インピーダンスの関係を(5)に代入すると

$$\Delta\beta = \omega \varepsilon_0(\varepsilon' - 1) \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\Delta s \cdot \sin(\pi x_d/a)^2}{\sqrt{1-(f_c/f)^2} ab} \quad \text{となり、これを整理すると(6)式を得る。}$$

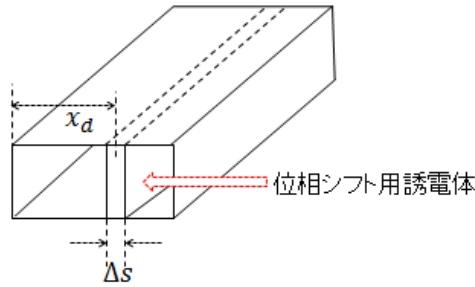
$$\Delta\beta = 2\pi(\varepsilon' - 1) \frac{\lambda_g}{\lambda_0^2} \frac{\Delta s}{s} \sin(\pi x_d/a)^2 \quad (6)$$

$\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2\pi/\lambda_0$ のp関係を用いると

$$\frac{1}{\lambda_g} - \frac{1}{\lambda_0} = (\varepsilon' - 1) \frac{\lambda_g}{\lambda_0^2} \frac{\Delta s}{s} \sin(\pi x_d/a)^2 \quad (7)$$

故に(6)式の両辺に導波管の長さ L を乗じ、更に(7)式を代入すると(8)式を得る。

$$\Delta\beta \cdot L = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_g} - \frac{1}{\lambda_0} \right) L \quad (8)$$



TE_{10} 矩形導波管用位相来の構造

図7 位相器の構造

12.2.4 導波管中に誘電体、磁性体を挿入した場合の管内波長

この値は12.2.2の位相定数から求められるが以下に示す様に比誘電率変化による管内波長の変化、比透磁率の変化による管内波長の変化からも求める事が出来る。先ず前者の場合位相定数と波長との関係式から $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$ の関係があるから、(8)式を考慮して次式となる。

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} - \frac{2\pi}{\lambda_0} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2} \lambda_0$$

故に (9)式の如く λ_g は $\sqrt{\epsilon_r}$ で表現できる。

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} \quad (9)$$

次に後者から求める。 $\Delta\epsilon = 0$ であるから(5)式は(10)式になる。

$$\Delta\beta = \omega \frac{\iint \Delta\mu \cdot c' \cdot |H|^2 dd}{\iint (E_0^* \times H + E \times H_0^*) \cdot i_z dd} \quad (10)$$

$$\Delta\mu = \mu_0(\mu_r - 1) \quad H = \frac{E}{\eta_{TE}} \quad \text{とおくと} \quad \Delta\beta = 2\pi(\mu_r - 1) \frac{\lambda_g \Delta s}{\lambda_0^2 s} \sin(\pi x_d/a)^2$$

となり(8)式と同様 $\beta = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_g} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$ を得る。故に

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} \quad (11)$$

以上の様に導波管の遮断周波数が求まり、その遮断周波数に於ける比誘電率と比透磁率から導波管の位相定数が(9)式(11)式で求められる。ここで c 、 c' は図5の値であり遮断周波数を求める際に必要な事は言うまでもない。