Check

445 整数 10800 の約数の個数を求めよ．

446 整式 x^5-x^2 の約数の個数を求めよ．

447 $3x+4y \leqq 20$ を満たす正の整数の組 $(x,\ y)$ は何個あるか．

448 次の値を求めよ．

(1) ${}_{12}\mathrm{P}_2$　　(2) $\dfrac{12!}{10!}$　　(3) ${}_{12}\mathrm{C}_9$

449 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 のうち，異なる数字を使ってできる 6 けたの偶数は何個あるか．

450 赤玉，青玉のそれぞれに 1 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた計 10 個の玉がある．10 個の玉から 3 個取り出して並べるとき，赤玉が 2 個以上になる場合は何通りあるか．

451 1 から 4 までの数字を繰り返し使用することを許して 4 けたの整数をつくるとき，奇数はいくつできるか．

452 1 から 9 までの数字を 1 つずつ書いた 9 枚の札が入っている箱から 3 枚を取り出す．3 枚とも奇数の場合は何通りあるか

453 1 班 6 人，2 班 5 人のなかから 4 人のメンバーを選ぶとき，1 班から 3 人以上選ぶ方法は何通りあるか．

454 1 つのさいころを続けて 5 回振るとき，1 の目が 2 回，6 の目が 3 回出る場合は何通りあるか．

455 赤玉 3 個，青玉 1 個，白玉 2 個，黒玉 3 個を 1 列に並べるとき，白玉 2 個が隣り合うような並べ方は何通りあるか．

456 男子 2 人と女子 4 人が丸く並んで輪になるとき，男子が隣り合わない並び方は全部で何通りあるか．

457 $(2x-1)^4$ を展開せよ．

458 $(2x-3)^7$ の展開式における x^4 の係数を求めよ．

例題 A，Bの2人で引き分けのないゲームを行い，3回続けて勝った方が勝者とし，決着がつくまで続ける．7回目に決着がつくのは何通りの場合があるか．

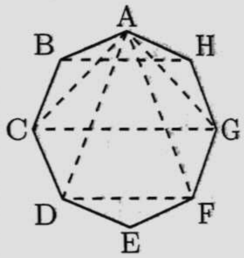
解 Aの勝ちを a，Bの勝ちを b で表すと，Aが勝者となるのは，最後の4回の勝敗については $*\,*\,*\,b\,a\,a\,a$ に限られる．$*\,*\,*$ の部分は，勝敗の組み合わせが 2^3 通りのうち，それまでに勝者が決定してしまう $a\,a\,a$, $b\,b\,b$, $a\,b\,b$ を除いた $2^3-3=5$（通り）．

Bについても同じだから　$5\times2=10$（通り）　//

459 A，Bの2人で引き分けのないゲームを，次の条件で決着がつくまで何回か続けて行う．8回目に決着がつくのは何通りの場合があるか．

(1) 2回続けて勝った方が勝者　　(2) 3回続けて勝った方が勝者

例題 正八角形の3つの頂点を結んで三角形をつくる．二等辺三角形でも直角三角形でもない三角形は何通りできるか．



解 三角形は全部で $_8C_3=56$（通り）

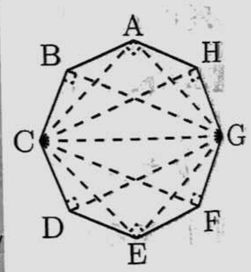
二等辺三角形は，Aを頂角とすると3通りあるから全部で $3\times8=24$（通り）．

直角三角形は，直径と他の頂点を結んで得られる三角形である．例えば，直径CGに対して他の頂点を選ぶと，6通りあるから全部で $4\times6=24$（通り）．

直角二等辺三角形はそのうちA, Eを選ぶときだから全部で $4\times2=8$（通り）．

二等辺三角形でも直角三角形でもない三角形は

$$56-(24+24-8)=16\text{（通り）}$$ //



460 正十二角形の3つの頂点を結んで三角形をつくる．

(1) 全部で何通りできるか．

(2) 二等辺三角形でも直角三角形でもない三角形は何通りできるか．

461 正十角形の3つの頂点を結んで三角形をつくる．

(1) 全部で何通りできるか．

(2) 正十角形と一辺のみを共有する三角形は何通りできるか．

(3) 正十角形と辺を共有しない三角形は何通りできるか．

例題 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 の 7 個の数字のうち 6 個を使って 6 桁の整数をつくるとき，全部で何通りの整数ができるか.

解 使わない数字が 1 または 3 である場合はそれぞれ $\dfrac{6!}{3!2!1!}=60$（通り）

使わない数字が 2 である場合は $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$（通り）

よって $60\times 2+90=210$（通り） //

462 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 の 9 個の数字のうち 7 個を使って 7 桁の整数をつくるとき，全部で何通りの整数ができるか.

463 6 つの数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 の中から異なる 4 個を選んで 4 けたの数をつくり，それらを小さいものから順に並べる．次の問いに答えよ.

(1) 全部で何個できるか.　　(2) 3120 は何番目の数か.

(3) 100 番目はどのような数か.

例題 次の値を求めよ.

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

(2) $1{}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+4{}_nC_4+\cdots+n\cdot{}_nC_n$

解 (1) 二項定理より $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_nx^n$

$x=1$ を代入すると $2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

ゆえに ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(1) ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$，${}_{n-1}C_{r-1}=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$ $(r\geqq 1)$ より

$$r\cdot{}_nC_r=r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}$$

よって

$$1{}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+4{}_nC_4+\cdots+n{}_nC_n$$
$$=n\cdot{}_{n-1}C_0+n\cdot{}_{n-1}C_1+n\cdot{}_{n-1}C_2+n\cdot{}_{n-1}C_3+\cdots+n\cdot{}_{n-1}C_{n-1}$$ (1) を利用せよ.
$$=n\cdot 2^{n-1}$$ //

$(1+x)^n$ を利用せよ.

464 次の値を求めよ.

(1) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$

(2) ${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+{}_{2n}C_6+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$

例題 8 個の同じボールを異なる 3 つの箱 A, B, C に入れる.

(1) ボールを 1 個も入れない箱があってもよいとすると，何通りの入れ方があるか.

(2) どの箱にも必ず 1 個は入れるとすると，何通りの入れ方があるか.

解 (1) 図のようにボール 8 個と仕切り 2 個を並べ，A, B, C に分ける.

○○ | ○○○ | ○○○

A　　　B　　　C

ボールと仕切り計 10 個を並べる場所のうち仕切り 2 個を置く場所を選ぶから

$_{10}C_2 = 45$（通り）

(2) まず，以下のようにボールを 8 個並べる.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

ボールとボールの間にある 7 個の場所のうち 2 個の場所に仕切りを入れ，A, B, C に分ければよい. 7 個の場所のうち仕切りを置く 2 個の場所を選ぶから

$_{7}C_2 = 21$（通り） //

465 12 本の同じ鉛筆を 4 人で分ける.

(1) 鉛筆をもらえない人がいてもよいとすると，何通りの分け方があるか.

(2) どの人も必ず 1 本はもらえるとすると，何通りの分け方があるか.

466 1 から 9 の数をいくつか加えて和を 10 にする. ただし，同じ数を何度用いてもよい. たとえば，2 個の数を用いる場合は，$1+9, 2+8, \cdots, 9+1$ の 9 通り，10 個の数を用いる場合は，$1+1+\cdots+1$ の 1 通りである.

(1) 3 個の数を用いる場合は何通りあるか.

(2) 8 個以上の数を用いる場合は何通りあるか.

(3) 全部で何通りあるか.

467 色の違う 8 個の同じ大きさのボールを異なる 3 つの箱 A, B, C に入れる.　色が違うことに注意せよ.

(1) C には 1 個も入れず，A, B には少なくとも 1 個は入れるとすると，何通りの入れ方があるか.

(2) どの箱にも少なくとも 1 個は入れるとすると，何通りの入れ方があるか.

Basic

→教 p.219 問・1

468 一般項が次の式で表される数列のはじめの 5 項を求めよ．

(1) $a_n = 2n - 3$　(2) $b_n = (-2)^n$　(3) $c_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

→教 p.219 問・2

469 一般項が $a_n = (-1)^n$, $b_n = 2^{n-1}$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ のはじめの 6 項を求めよ．

(2) $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{3}$ のとき，数列 $\{c_n\}$ のはじめの 6 項を求めよ．

→教 p.220 問・3

470 等差数列になるように，$\square$ の中にあてはまる数を入れよ．

(1) 3, $\square$, 17, $\square$, $\square$　(2) $\square$, 7, $\square$, $\square$, 1

→教 p.220 問・4

471 初項が -54，公差が 7 の等差数列について，次の問いに答えよ．

(1) 一般項を求めよ．　(2) -12 は第何項か．

(3) はじめて正の数になるのは第何項か．

→教 p.221 問・5

472 次の等差数列の和を求めよ．

(1) 初項 3，公差 4 の等差数列の，初項から第 10 項までの和を求めよ．

(2) 等差数列の和 $(-2) + 1 + 4 + \cdots + 43$ を求めよ．

(3) 100 から 200 までの整数のうち，4 の倍数の和を求めよ．

→教 p.221 問・6

473 初項が -85，公差が 6 の等差数列について，次の問いに答えよ．

(1) 初項から第 10 項までの和を求めよ．

(2) 初項から第何項までの和をとると，初めて 0 より大きくなるか．

→教 p.222 問・7

474 次の数列が等比数列になるように，$\square$ の中にあてはまる数を入れよ．

(1) 3, $\square$, $\square$, -24, $\square$　(2) -4, $\square$, $\square$, $\square$, $-\dfrac{1}{4}$

(3) $\square$, 1, $\square$, 9, $\square$

→教 p.222 問・8

475 次の等比数列の一般項を求めよ．また，第 10 項も求めよ．

(1) 初項が 5，第 4 項が 40　(2) 第 2 項が 4，第 5 項が $\dfrac{1}{2}$

→教 p.223 問・9

476 次の等比数列の和を求めよ．

(1) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^7$

(2) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{3^3} + \cdots - \dfrac{1}{3^7}$

477 等比数列 2, 6, 18, 54, $\cdots$ について，以下の問いに答えよ． →教 p.223 問・10

(1) この数列の一般項を求めよ．　(2) 4374 は第何項か．

(3) 等比数列の和 $2+6+18+54+\cdots+4374$ を求めよ．

478 次の数列の和を $\sum$ 記号を用いずに表せ．また，その和を求めよ． →教 p.224 問・11

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k$　(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{7}(2i-3)$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

479 次の数列の和を $\sum$ 記号を用いて表せ． →教 p.224 問・12

(1) $21+22+23+24+25+\cdots+50$

(2) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}-\dfrac{1}{243}$

480 次の和を求めよ． →教 p.226 問・13

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

(2) $1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+\cdots+n(2n-1)$

(3) $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2$

481 次の数列を表す漸化式をつくれ． →教 p.227 問・14

(1) 初項が 1 で，各項が直前の項の 2 倍に 3 を加えた数列

(2) 初項が 3 で，各項が直前の項の -2 倍に 1 を加えた数列

(3) 初項が 2 で，各項が直前の項から 2 引いたものを 3 乗した数列

(4) 初項が -1 で，各項が直前の項の 2 倍から 1 引いたものを 2 乗した数列

482 次の漸化式で表される数列のはじめの 5 項を求めよ． →教 p.227 問・15

(1) $a_1=2,\ \ a_{k+1}=3a_k-1\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $b_1=3,\ \ b_{k+1}=b_k+(2k-1)\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

483 次の漸化式で表される数列の一般項を求めよ． →教 p.228 問・16

(1) $a_1=2,\ \ a_{k+1}=5a_k+2\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $b_1=3,\ \ b_{k+1}=b_k+k\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

484 n が自然数のとき，n^2+3n は偶数であることを数学的帰納法で証明せよ． →教 p.228 例題 7

485 次の漸化式で表される数列がある． →教 p.229 問・17

$$a_1=1,\ a_{k+1}=\frac{a_k}{2a_k+1}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，$a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ であることを数学的帰納法で証明せよ．

7章 場合の数と数列

Check

486 一般項が次の式で表される数列のはじめの 5 項を求めよ.

(1) $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$　　(2) $b_n=1-2^n$

487 初項が -82，第 4 項が -70 の等差数列について，次の問いに答えよ.

(1) 一般項を求めよ.

(2) はじめて正の数になるのは第何項か.

(3) 初項から第何項までの和をとると，初めて 0 より大きくなるか.

488 次の数列が等比数列になるように，$\square$ の中にあてはまる数を入れよ.

(1) $2,\ \square,\ \square,\ 54,\ \square$　　(2) $\square,\ 3,\ \square,\ \dfrac{3}{4},\ \square$

489 等比数列 $2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,\ \cdots$ について，次の問いに答えよ.

(1) この数列の一般項を求めよ.

(2) -4374 は第何項か.

(3) 等比数列の和 $2-6+18-54+162-\cdots-4374$ を求めよ.

490 次の数列の和を $\sum$ 記号を用いずに表せ．また，その和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(k^2-2k+1)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(-2)^{k-1}$

491 数列の和 $1\cdot2+3\cdot3+5\cdot4+\cdots+(2n-1)(n+1)$ を $\sum$ 記号を用いて表せ.
また，その和を求めよ.

492 初項が -2 で，各項が直前の項の -2 倍に 1 を加えたものを 2 乗した数列を表す漸化式をつくれ.

493 次の漸化式で表される数列のはじめの 5 項を求めよ.

$a_1=2,\quad a_{k+1}=k\,a_k+1\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

494 次の漸化式で表される数列の一般項を求めよ.

$b_1=3,\quad b_{k+1}=b_k+2^k\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

495 n が自然数のとき，4^n-1 は 3 の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ.

496 次の漸化式で表される数列がある.

$$a_1=3,\quad a_{k+1}=\frac{a_k}{a_k+2}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，$a_n=\dfrac{3}{2^{n+1}-3}$ であることを数学的帰納法で証明せよ.

Check

486 一般項が次の式で表される数列のはじめの 5 項を求めよ．

(1) $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$　　　(2) $b_n = 1 - 2^n$

487 初項が -82，第 4 項が -70 の等差数列について，次の問いに答えよ．

(1) 一般項を求めよ．

(2) はじめて正の数になるのは第何項か．

(3) 初項から第何項までの和をとると，初めて 0 より大きくなるか．

488 次の数列が等比数列になるように，$\square$ の中にあてはまる数を入れよ．

(1) $2,\ \square,\ \square,\ 54,\ \square$　　　(2) $\square,\ 3,\ \square,\ \dfrac{3}{4},\ \square$

489 等比数列 $2,\ -6,\ 18,\ -54,\ 162,\ \cdots$ について，次の問いに答えよ．

(1) この数列の一般項を求めよ．

(2) -4374 は第何項か．

(3) 等比数列の和 $2-6+18-54+162-\cdots-4374$ を求めよ．

490 次の数列の和を $\sum$ 記号を用いずに表せ．また，その和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(k^2-2k+1)$　　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(-2)^{k-1}$

491 数列の和 $1\cdot2+3\cdot3+5\cdot4+\cdots+(2n-1)(n+1)$ を $\sum$ 記号を用いて表せ．また，その和を求めよ．

492 初項が -2 で，各項が直前の項の -2 倍に 1 を加えたものを 2 乗した数列を表す漸化式をつくれ．

493 次の漸化式で表される数列のはじめの 5 項を求めよ．

$a_1 = 2,\quad a_{k+1} = k\,a_k + 1\quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

494 次の漸化式で表される数列の一般項を求めよ．

$b_1 = 3,\quad b_{k+1} = b_k + 2^k\quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

495 n が自然数のとき，$4^n - 1$ は 3 の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ．

496 次の漸化式で表される数列がある．

$$a_1 = 3,\quad a_{k+1} = \frac{a_k}{a_k + 2}\quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，$a_n = \dfrac{3}{2^{n+1}-3}$ であることを数学的帰納法で証明せよ．

Step up

例題 等比数列の初項 a から第 n 項までの和を S_n とおくとき，等式 $S_{10}=33S_5$ を満たすように公比 r を求めよ．ただし，$a\neq 0$，$r\neq 1$ とする．

解 $r\neq 1$ より $\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=33\cdot\dfrac{a(r^5-1)}{r-1}$ $(a\neq 0)$

これから $r^{10}-33r^5+32=0$

これを解いて $r=2$ //

497 次の等比数列の公比を求めよ．

(1) 初項 a から第 n 項までの和を S_n とおくとき，等式 $S_{10}=-31S_5$ を満たすように公比 r を求めよ．ただし，$a\neq 0$，$r\neq 1$ とする．

(2) 初項 3，末項 768，その和が 513

例題 $a_n=n^2-n$ のとき，次を求めよ．

(1) a_{2k-1}　　(2) $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$

解 (1) $a_{2k-1}=(2k-1)^2-(2k-1)=4k^2-6k+2$

(2) (1) の結果より

$$与式=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-6k+2)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$$

$$=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)+2n=\frac{1}{3}n(n-1)(4n+1)$$ //

498 $a_n=n^2+n$ であるとき，次を求めよ．

(1) a_{2k}　　(2) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$

例題 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ を求めよ．

解 恒等式 $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ を用いて

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$ //

499 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$ を求めよ．

例題にあるような恒等式を求めて利用せよ．

500 $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}$ を求めよ．

$\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$ を利用せよ．

501 次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ を証明せよ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ を求めよ.

(1) の恒等式を利用せよ.

例題 次の和を求めよ.

$$S_n=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$$

解 両辺に2をかけると　$2S_n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$

辺々引くと　$(1-2)S_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n$

$$-S_n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot2^n=-1+2^n-n\cdot2^n=-1-(n-1)\cdot2^n$$

よって　$S_n=1+(n-1)\cdot2^n$ //

502 次の和を求めよ.

$$S_n=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$$

例題 $a_1=1$, $a_{k+1}=3a_k+2$ で表される数列について, 以下の問いに答えよ.

(1) この漸化式が $a_{k+1}-\alpha=3(a_k-\alpha)$ と変形できるときの定数 α を求めよ.

(2) 一般項を求めよ.

解 (1) 展開して整理すると $a_{k+1}=3a_k-2\alpha$ となる. $-2\alpha=2$ より $\alpha=-1$

(2) (1) より, 数列 $\{a_n+1\}$ は公比3の等比数列である.

初項が $a_1+1=2$ だから $a_n+1=2\cdot3^{n-1}$　$\therefore\ a_n=2\cdot3^{n-1}-1$ //

503 次の漸化式で表される数列の一般項を求めよ.

(1) $a_1=1$, $a_{k+1}=2a_k+1$　(2) $a_1=2$, $a_{k+1}=3a_k-2$

(3) $a_1=2$, $a_{k+1}=-2a_k+1$

例題 自然数 n について, 不等式 $2^n>n$ が成り立つことを, 数学的帰納法で証明せよ.

解 (i) $n=1$ のとき, 左辺 $=2^1=2$, 右辺 $=1$ だから成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき $2^k>k$ が成り立つと仮定する. 両辺に2をかけて $2^{k+1}>2k$

$2k\geqq k+1$ より $2^{k+1}>k+1$　したがって, $n=k+1$ のときも成り立つ.

(i), (ii) より, すべての自然数 n について, $2^n>n$ が成り立つ. //

504 自然数 n について, $x>2$ のとき, 不等式 $x^n>2^n$ が成り立つことを証明せよ.

例題 $x>0$ のとき，2 以上の自然数 n について，不等式 $(1+x)^n>1+nx$ が成り立つことを，数学的帰納法で証明せよ．

解 (i) $n=2$ のとき，$(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$ だから成り立つ．

証明したい最初の n は 2

(ii) $n=k$ のとき，$(1+x)^k>1+kx$ が成り立つと仮定する．

両辺に $1+x$ をかける．$(1+x>0)$

$(1+x)^{k+1}>(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x$

したがって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i), (ii) より，2 以上の自然数 n について，$(1+x)^n>1+nx$ が成り立つ．//

505 自然数 n について，次の不等式が成り立つことを，数学的帰納法で証明せよ．

(1) $2^n>n^2 \quad (n\geqq 5)$

(2) $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{n-1}{n} \quad (n\geqq 2)$

例題 n が自然数のときに，次の等式が成り立つことを (1)，(2) の 2 通りの方法で証明せよ． $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(1) 恒等式 $(k+1)^4-(k-1)^4=8k^3+8k$ を用いる．

(2) 数学的帰納法を用いる．

解 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-(k-1)^4\}=2n(n+1)(n^2+n+2)$

$$\begin{aligned}&(\cancel{2}^4-0^4)\\+&(\cancel{3}^4-1^4)\\+&(\cancel{4}^4-\cancel{2}^4)\\+&(\cancel{5}^4-\cancel{3}^4)\\+&(\cancel{6}^4-\cancel{4}^4)+\cdots\\&\qquad\vdots\\+&\{\cancel{(n-1)^4}-\cancel{(n-3)^4}\}\\+&\{\quad n^4\quad-\cancel{(n-2)^4}\}\\+&\{(n+1)^4-\cancel{(n-1)^4}\}\\=&\,n^4+(n+1)^4-1^4\\=&\,2n(n+1)(n^2+n+2)\end{aligned}$$

この左辺は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}8k^3+\sum_{k=1}^{n}8k=8\sum_{k=1}^{n}k^3+4n(n+1)$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}\{n(n+1)(n^2+n+2)-2n(n+1)\}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(1) 変数の名前を変えて，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}j^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を証明する．

(i) $n=1$ のとき，左辺 $=1$，右辺 $=1$ だから成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$\displaystyle\sum_{j=1}^{k}j^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$ が成り立つと仮定する．

$$\sum_{j=1}^{k+1}j^3=\sum_{j=1}^{k}j^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$
$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k^2+4k+4)=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n について成り立つ．//

506 n が自然数のときに，等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k^3+5\sum_{k=1}^{n}k^4=n^2(n+1)^3$ が成り立つことを証明せよ．

7 章 場合の数と数列

Plus

1——三項定理

例題 $(a+b+c)^n$ を展開したときの $a^pb^qc^r$ の係数は $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ となることを証明せよ．（ただし $p+q+r=n$）

解 $a^pb^qc^r$ は，n 個の $(a+b+c)$ のうち，a を p 個，b を q 個，c を r 個選んで掛けることにより得られる．

したがって，$a^pb^qc^r$ の係数は，a を p 個，b を q 個，c を r 個並べた順列の総数だから $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ となる．　//

507 $(x+y+z)^8$ を展開したとき，$x^4y^2z^2$ の係数を求めよ．

508 $(x+y+2)^6$ を展開したとき，x^2y^3 の係数を求めよ．

2——階差数列

数列 $\{a_n\}$ について，$b_n=a_{n+1}-a_n$ を**階差**といい，階差からなる数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**という．数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は，階差数列 $\{b_n\}$ を使って

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(-a_1+a_2)+(-a_2+a_3)+\cdots+(-a_{n-2}+a_{n-1})+(-a_{n-1}+a_n) \\ &= a_1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

と表すことができる．

●**注**……ただし，a_1 については別に調べる必要がある．

例題 $a_1=1,\ a_{k+1}=a_k+3k\ (k \geqq 1)$ で表される数列の一般項を求めよ．

解 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると $b_k=a_{k+1}-a_k=3k$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}3k=1+3\frac{(n-1)n}{2}=\frac{3n^2-3n+2}{2} \quad (n \geqq 2)$$

この式は $n=1$ のときも成り立つから，$a_n=\dfrac{3n^2-3n+2}{2}$　//

509 次の漸化式で表される数列の一般項を求めよ．

(1) $a_1=7,\ a_{k+1}=a_k+4k+1$　　(2) $a_1=0,\ a_{k+1}=a_k+k^2$

(3) $a_1=1,\ a_{k+1}=a_k+\dfrac{1}{k(k+1)}$

510 数列 1, 3, 7, 13, 21, … の一般項を求めよ．

(2) $a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4$

(3) $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$

444 ${}_7C_3\cdot 3^4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-105$

Check

445 60 個 ⇒425

446 12 個 ⇒426

447 12 個 ⇒427

448 (1) 132　(2) 132　(3) 220

⇒430,431,436

449 312 個 ⇒432

450 ${}_5P_3+{}_5P_2\times 3\times 5=360$（通り） ⇒433

451 128 個 ⇒434,435

452 10 通り ⇒437

453 115 通り ⇒438

454 10 通り ⇒440

455 1120 通り ⇒441

456 72 通り ⇒442

457 $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$ ⇒443

458 ${}_7C_3\cdot 2^4\cdot(-3)^3=-15120$ ⇒444

Step up

459 A の勝ちを a，B の勝ちを b で表す．

(1) $a\,b\,a\,b\,a\,b\,a\,a$，$b\,a\,b\,a\,b\,a\,b\,b$ の 2 通り

(2) A が勝者となるのは，8 回のゲームの結果が

$*\,*\,*\,*\,b\,a\,a\,a$（$*$ は a または b）

と表され，$****$ の部分に a または b が 3 回以上並ばず，かつ，$*\,a\,b\,b$ とならない場合である．したがって

$2^4-(3+3+2)=8$（通り）

B についても同じだから　16 通り

460 (1) ${}_{12}C_3=220$（通り）

(2) 正三角形でない二等辺三角形は $12\times 4=48$（通り）である．正三角形は 4 通りあるから，二等辺三角形は　$48+4=52$（通り）

直角三角形は　$6\times 10=60$（通り）

直角二等辺三角形は　$6\times 2=12$（通り）

よって　$220-(52+60-12)=120$（通り）

461 (1) ${}_{10}C_3=120$（通り）　(2) $10\times 6=60$（通り）

(3) $120-60-10=50$

（通り）

462 使わない数字 2 個が同じ場合は

$\frac{7!}{3!3!1!}\times 3=420$（通り）

使わない数字 2 個が異なる場合は

$\frac{7!}{3!2!2!}\times 3=630$（通り）

よって　$420+630=1050$（通り）

463 (1) $5\times{}_5P_3=300$（個）

(2) 千の位が 1，2 であるものは，それぞれ ${}_5P_3=60$ 個ずつあるから，3012 が 121 番目になる．千の位が 3，百の位が 0 であるものは，${}_4P_2=12$ 個あるから，3102 は 133 番目になる．千の位が 3，百の位が 1，十の位が 0 であるものは，${}_3P_1=3$ 個あるから，3120 は 136 番目の数．

(3) 千の位が 1 であるものは，${}_5P_3=60$ 個あり，千の位が 2 で百の位が 0，1，3 であるものは，それぞれ ${}_4P_2=12$ 個ずつあるから，2401 が 97 番目になり，100 番目は 2410

464 (1) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+{}_nC_3x^3+\cdots+{}_nC_nx^n$

に $x=-1$ を代入せよ．　0

(2) $(1+x)^{2n}$ を展開し，$x=1$ と $x=-1$ を代入した2式を加える． 2^{2n-1}

465 例題と同様に，鉛筆12本と仕切り3個を並べればよい．

(1) ${}_{15}C_3=455$（通り） (2) ${}_{11}C_3=165$（通り）

466 例題(2)と同様にボール10個と仕切りを並べて，仕切りにはさまれたボールの数を和の形に表せばよい．

(1) 9個の場所から仕切り2個をおく場所を選ぶから ${}_9C_2=36$（通り）

(2) ${}_9C_7+{}_9C_8+{}_9C_9=46$（通り）

(3) 9個の場所の各々に仕切りを入れるか入れないかを選ぶ選び方は $2^9=512$（通り）

このうち，仕切りを1つも入れない場合は数10を用いることになるから，不適．

$\therefore\ \ 512-1=511$（通り）

467 重複順列の公式を用いよ．

(1) $2^8-2=254$（通り）

(2) $3^8-3(2^8-2)-3=5796$（通り）

2 数列

Basic

468 (1) $-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7$ (2) $-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32$

(3) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{30}$

469 (1) $a_n:-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1$

$b_n:1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32$

(2) $c_n:0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 11$

470 (1) 10, 24, 31 (2) 9, 5, 3

471 (1) $7n-61$ (2) 第7項 (3) 第9項

472 (1) 210 (2) 328

(3) 200は第26項だから 3900

473 (1) -580

(2) 第 n 項までの和は $n(3n-88)$

$n(3n-88)>0$ を解け． 第30項

474 (1) $-6,\ 12,\ 48$

(2) $\pm 2,\ -1,\ \pm\frac{1}{2}$ (複号同順)

(3) $\pm\frac{1}{3},\ \pm 3,\ \pm 27$ (複号同順)

475 (1) 一般項 $5\cdot 2^{n-1}$，第10項 2560

(2) 一般項 2^{4-n}，第10項 $\frac{1}{64}$

476 (1) 3280 (2) $\frac{1640}{2187}$

477 (1) $2\cdot 3^{n-1}$ (2) 第8項 (3) 6560

478 (1) $1+2+3+4+5=15$

(2) $(-1)+1+3+5+7+9+11=35$

(3) $3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=3(2^n-1)$

479 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}(k+20)$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

480 (1) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$
$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) $\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$
$=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

(3) $\displaystyle 4\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

481 (1) $a_1=1,\ a_{k+1}=2a_k+3\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots)$

(2) $a_1=3,\ a_{k+1}=-2a_k+1\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots)$

(3) $a_1=2,\ a_{k+1}=(a_k-2)^3\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots)$

(4) $a_1=-1,\ a_{k+1}=(2a_k-1)^2\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots)$

482 (1) 2, 5, 14, 41, 122 (2) 3, 4, 7, 12, 19

483 (1) $a_n=\frac{1}{2}(5^n-1)$

(2) $b_n=\frac{1}{2}(n^2-n+6)$

484 (i) $n=1$ のとき $1^2+3\cdot 1=4$ より成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$k^2+3k=2m$ となる自然数 m が存在する．

$n=k+1$ のとき

$$(k+1)^2+3(k+1)=k^2+3k+2(k+2)$$
$$=2m+2(k+2)=2(m+k+2)$$ だから，

$(k+1)^2+3(k+1)$ も偶数となり，成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n について n^2+3n は偶数である．

485 (i) $n=1$ のとき $\dfrac{1}{2\cdot1-1}=1$ より成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき $a_k=\dfrac{1}{2k-1}$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{2a_k+1}=\frac{\frac{1}{2k-1}}{\frac{2}{2k-1}+1}=\frac{1}{2+(2k-1)}$$
$$=\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2(k+1)-1}$$

となり，成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n について

$a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ が成り立つ．

Check

486 (1) $1,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{5}{9}$

(2) $-1,\ -3,\ -7,\ -15,\ -31$ ⇒468

487 (1) $4n-86$ (2) 第 22 項 (3) 第 43 項

⇒471,473

488 (1) 左から 6, 18, 162

(2) 左から $\pm6,\ \pm\dfrac{3}{2},\ \pm\dfrac{3}{8}$ (複号同順) ⇒474

489 (1) $2\cdot(-3)^{n-1}$ (2) 第 8 項 (3) -3280

⇒477

490 (1) $0+1+4+9=14$

(2) $1-2+4-8+16-32=-21$ ⇒478

491 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k+1)=\frac{1}{6}n(4n^2+9n-1)$

⇒479,480

492 $a_1=-2,\ a_{k+1}=(-2a_k+1)^2\ \ (k=1,2,\cdots)$

⇒481

493 2, 3, 7, 22, 89

⇒482

494 $b_n=2^n+1$

⇒483

495 $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$4^k-1=3m$ (m は自然数) と表されることを利用せよ． ⇒484

496 漸化式を利用して，$a_k=\dfrac{3}{2^{k+1}-3}$ であるとき，$a_{k+1}=\dfrac{3}{2^{k+2}-3}$ となることを示せ． ⇒485

Step up

497 (1) $r\fallingdotseq 1$ より

$$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=-31\cdot\frac{a(r^5-1)}{r-1}\quad(a\fallingdotseq 0)$$

これを解いて $r=-2$

(2) 公比を r，末項が第 n 項であるとする．

$3r^{n-1}=768$ より $r^{n-1}=256\quad(r\fallingdotseq 1)$

$\dfrac{3(r^n-1)}{r-1}=513$ より $r^n-1=171(r-1)$

$r^n=r^{n-1}\cdot r$ に注意してこれを解くと $r=-2$

498 (1) $a_{2k}=(2k)^2+2k=4k^2+2k$

(2) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{2k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}(4k^2+2k)=\frac{1}{3}n(n+1)(4n+5)$$

499 恒等式 $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

を用いる．和は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

500 $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

501 (1) 分母を有理化せよ． (2) $\sqrt{n+1}-1$

502 両辺に 2 を掛けて辺々引くと

$$-S_n=1+2\cdot2+2\cdot2^2+\cdots$$
$$\cdots+2\cdot2^{n-1}-(2n-1)\cdot2^n$$
$$=1+\frac{4\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}-(2n-1)\cdot2^n$$

よって $S_n=3+(2n-3)\cdot2^n$

503 (1) $a_{k+1}+1=2(a_k+1)$ と変形できる．

$a_n=2^n-1$

(2) $a_{k+1}-1=3(a_k-1)$ と変形できる．

$a_n=3^{n-1}+1$

(3) $a_{k+1}-\dfrac{1}{3}=-2\left(a_k-\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できる．

$a_n=\dfrac{1}{3}\{5\cdot(-2)^{n-1}+1\}$

504 (i) $n=1$ のとき，$x>2$ だから成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき $x^k>2^k$ が成り立つと仮定する．

両辺に x をかけて $x^{k+1}>2^k\cdot x$

$2^k\cdot x>2^k\cdot 2=2^{k+1}$

したがって　$x^{k+1}>2^{k+1}$

$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n について $x^n>2^n$ が成り立つ．

505 (1) (i) $n=5$ のとき，左辺 $=2^5=32$，

右辺 $=5^2=25$ だから成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき $2^k>k^2$ が成り立つと仮定する．両辺に 2 をかけて $2^{k+1}>2k^2$

$k\geqq 5$ のとき

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1$

$=(k-1)^2-2\geqq 4^2-2>0$

よって　$2k^2>(k+1)^2$

したがって　$2^{k+1}>2k^2>(k+1)^2$

$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i), (ii) より，$n\geqq 5$ のとき $2^n>n^2$ が成り立つ．

(2) (i) $n=2$ のときは左辺 $=\dfrac{1}{2^2}$，右辺 $=\dfrac{1}{2}$

よって　左辺 < 右辺

(ii) $n=k$ のとき

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<\frac{k-1}{k}$$

が成り立つと仮定する．両辺に $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を加えて

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$<\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\frac{k^3+k^2-1}{k(k+1)^2}<\frac{k^3+k^2}{k(k+1)^2}=\frac{k}{k+1}$$

(i), (ii) より，$n\geqq 2$ のとき不等式は成り立つ．

506 (i) $n=1$ のとき，左辺 $=1+2+5=8$，

右辺 $=1^2\cdot 2^3=8$ だから成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき　(変数の名前を変えて)

$$\sum_{j=1}^{k}j^2+2\sum_{j=1}^{k}j^3+5\sum_{j=1}^{k}j^4=k^2(k+1)^3$$

が成り立つと仮定する．

$n=k+1$ のとき，

$$\sum_{j=1}^{k+1}j^2+2\sum_{j=1}^{k+1}j^3+5\sum_{j=1}^{k+1}j^4$$

$$=\sum_{j=1}^{k}j^2+2\sum_{j=1}^{k}j^3+5\sum_{j=1}^{k}j^4$$

$$+(k+1)^2+2(k+1)^3+5(k+1)^4$$

$$=k^2(k+1)^3+(k+1)^2+2(k+1)^3+5(k+1)^4$$

$$=(k+1)^2\{k^2(k+1)+1+2(k+1)+5(k+1)^2\}$$

$$=(k+1)^2(k^3+6k^2+12k+8)$$

$$=(k+1)^2(k+2)^3$$

したがって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n で成り立つ．

Plus

1　三項定理

507 $\dfrac{8!}{4!\ 2!\ 2!}=420$

508 $\dfrac{6!}{2!\ 3!\ 1!}x^2y^32^1=120x^2y^3$ より　120

2　階差数列

509 (1) $2n^2-n+6$

(2) $\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$　　(3) $2-\dfrac{1}{n}$

(いずれも $n=1$ のときも成り立つ)

510 階差数列 $\{b_n\}$ は $b_n=2n$

$a_n=n^2-n+1$　($n=1$ のときも成り立つ)