Basic

185 ある機械で大量に生産したナットから，10個を無作為に選んで直径（単位 cm）を測定したところ，次の値が得られた．母平均 μ の推定値を求めよ． →教p.91 問・1

5.36　5.41　5.43　5.29　5.33　5.40　5.47　5.35　5.45　5.31

186 ある大量に生産された材料から，6個を無作為に選んで重さ（単位 kg）を測定したところ，次の値が得られた．これから母分散 σ^2 の推定値 u^2 を求めよ． →教p.92 問・2

3.60　4.01　3.98　3.71　3.68　3.82

187 大量に生産された製品の中から無作為に6個を選び，その重量（単位 kg）を調べたところ，平均が20.52，不偏分散が5.67であった．母平均 μ の95％信頼区間を求めよ．ただし，重量は正規分布に従うものとする． →教p.95 問・3

188 次の値は，ある飼料5袋の重量（単位 kg）を測定した値である． →教p.95 問・3

10.69　11.06　10.04　10.83　9.88

$N(\mu,\ \sigma^2)$ からの無作為標本とみて，母平均 μ の95％信頼区間を求めよ．

189 ある学校の学生200人を無作為に選び，1日あたりの睡眠時間（単位 時間）を聞いたところ，平均が6.44，不偏分散が1.86であった．母平均 μ の95％信頼区間を求めよ． →教p.95 問・4

190 ある学校において，自転車通学生の割合を調べるために，大きさ300の無作為標本をとった．母集団に対する自転車通学生の割合を0.65と仮定した場合，この調査における標本比率の平均と標準偏差を求めよ．また，標本比率が0.70より大きくなる確率を求めよ． →教p.96 問・5

191 あるお菓子の製造メーカーで，糖度に基準を設けて新製品のクッキーを作ることになった．試作品の中から400個を無作為抽出して調べたところ，基準を満たさない不良品が10個あった．このクッキーの基準を満たさない不良率 p の95%信頼区間を求めよ． →教p.98 問・6

192 画びょうを投げるとき，針が上に向く割合 p を調べたい．今，300回投げたところ，168回が上向きになった．母比率 p の95％信頼区間を求めよ． →教p.98 問・6

193 ある試行の成功率 p を調べるため標本調査を行う．信頼区間の幅を0.03以内になるように，信頼係数95％で p の区間推定をしたい．標本はいくつ必要となるか求めよ． →教p.98 問・7

Check

194 ある都市の無作為に抽出した18歳男子15人の身長（単位 cm）を測定したところ，平均167.4，不偏分散 6.0^2 であった．母集団の身長は正規分布に従うとして，その都市における18歳男子の平均身長 μ の95％信頼区間を求めよ．

195 ある作物の試験栽培において，同一条件にあるように管理を施した8か所の面積の等しい畑を選び，収穫高（単位 kg）を調べたところ，次のような結果を得た．母平均 μ の99％信頼区間を求めよ．ただし，収穫高は正規分布に従うとする．

3.2　4.8　2.9　3.1　4.7　2.4　4.1　3.6

196 ある学校の新入生500名に対して数学のテストを行った．受験者のうち60名を抽出し，得点の平均点と不偏分散を求めたところ，それぞれ52.3，20.2^2 であった．全受験者の平均点の95％信頼区間を求めよ．

197 ある都市の家族500世帯を無作為に抽出し，車を所有している人の割合を調べた．この都市の車の所有率を0.75と仮定した場合，この調査における標本所有率 $\hat{P}$ の平均と標準偏差を求めよ．また $\hat{P} \geqq 0.77$ となる確率を求めよ．

198 ある部品の製造工場で，これまでの不良率（不良品の比率）は2.5％であった．最近，製造機械が老朽化してきたため，500個の製品を抜き取って検査したところ，15個が不良品であった．最近の不良率の95％信頼区間を求めよ．

199 ある菓子メーカーが，新製品に対する消費者の支持率を調べるため，モニターを募集することにした．95%信頼区間の幅が0.05以内になるようにするためには，少なくとも何人のモニターが必要か．

Step up

例題 ある実験を 50 回実施したところ，特性値の平均値は 256.4 であり，不偏分散は 18.8^2 であった．次の問いに答えよ．

(1) 母平均の 95 % 信頼区間を求めよ．

(2) 95 % 信頼区間の幅を 8 以内にしたい．標本の大きさが変わっても不偏分散が変わらないとすると，標本をいくつ抽出したらよいか．

解 標本の大きさ n は大きいから，特性値は近似的に正規分布に従うとしてよい．

(1) $n = 50$，$\overline{x} = 256.4$，$u^2 = 18.8^2$，$\alpha = 95\,\%$ より

$$256.4 - 1.960 \times \frac{18.8}{\sqrt{50}} \leqq \mu \leqq 256.4 + 1.960 \times \frac{18.8}{\sqrt{50}}$$

$$\therefore\ 251.2 \leqq \mu \leqq 261.6$$

(2) 標本の大きさが n のときの 信頼区間は

$$256.4 - 1.960 \times \frac{18.8}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq 256.4 + 1.960 \times \frac{18.8}{\sqrt{n}}$$ したがって

$$2 \times 1.960 \times \frac{18.8}{\sqrt{n}} \leqq 8 \qquad \therefore\ n \geqq 84.9$$

よって，85 以上の標本を抽出すればよい． //

200 ある教科の全国統一テストが実施された．昨年度のテスト結果では標準偏差は 15 点であった．今年度のテストの全国平均点を信頼区間の幅が 2 以内になるように区間推定するには，何人以上を抽出するとよいか．ただし，信頼係数は 95 % とし，不偏分散は 15^2 であるとする．

201 ある学年から無作為に選ばれた 1 人の学生が，ある問題を解くのに要する時間は，近似的に正規分布に従うことがわかっている．不偏分散が 10^2 であったときの母平均の 99 % 信頼区間の幅が 4 以内になるように区間推定するとすれば，何人の学生が必要となるか．

2 仮説検定

まとめ

● **仮説と検定**

(1) 有意水準（危険率）α を定める．

(2) 帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を設定する．

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \fallingdotseq \theta_0$（両側検定）　$\theta > \theta_0$（右側検定）　$\theta < \theta_0$（左側検定）

(3) H_0 を仮定して，検定統計量 X の実現値 x を求める．

(4) p 値を求めて H_0 を棄却するかどうかを判断する．

p 値　X が x より外れる確率（α より小さければ棄却）

判定 ＼ H_0 の真偽	H_0 が真	H_0 が偽 (H_1 が真)
H_0 を受容	正しい判断	**第 2 種の誤り**
H_0 を棄却	**第 1 種の誤り**	正しい判断

検出力　第 2 種の誤りを犯さない確率

● **いろいろな検定**

検定		検定統計量	確率分布
母平均	正規母集団で母分散が未知	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{U^2/n}}$	自由度 $n-1$ の t 分布
母平均の差	正規母集団で母分散が未知	$T = \dfrac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{{U_1}^2/n_1 + {U_2}^2/n_2}}$	近似的に自由度 $d^{*)}$ の t 分布
母比率	二項母集団で n が大きい	$Z = \dfrac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0/n}}$	近似的に標準正規分布

*) $d = \dfrac{({u_1}^2/n_1 + {u_2}^2/n_2)^2}{\dfrac{({u_1}^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{({u_2}^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$　（${u_1}^2$，${u_2}^2$ は ${U_1}^2$，${U_2}^2$ の実現値）

λ についての 2 次方程式の判別式は

$$\frac{D}{4} = \sigma_{xy}{}^2 - \sigma_x{}^2\sigma_y{}^2 \leqq 0 \text{ だから}$$

$$\frac{\sigma_{xy}{}^2}{\sigma_x{}^2\sigma_y{}^2} \leqq 1 \qquad \therefore \quad \rho_{xy}{}^2 \leqq 1$$

よって　$-1 \leqq \rho_{xy} \leqq 1$

Plus

1　多次元確率変数

173

x \ y	1	2	3	$P(X=x)$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{5}$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

174 例題の X と Y は互いに独立である．

問題 173 の X と Y は互いに独立でない．

175 (1) $c=6$

(2) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^3} & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

176 $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(y) = e^{-y}$ より

$f_1(x)f_2(y) = f(x,\ y)$

よって，互いに独立である．

2　歪度と尖度

177 $I_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$ とおく．$f(x)$ が偶関数であることを利用せよ．

$I_1 = 0$, $I_2 = \frac{2}{3}$, $I_3 = 0$, $I_4 = \frac{16}{15}$ より

歪度 $\frac{I_3}{\sigma^3} = 0$　尖度 $\frac{I_4}{\sigma^4} = \frac{12}{5}$

3　モーメント母関数（積率母関数）

178 (1) $M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$

$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$

(2) $M'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$

$M''(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)}$

$E[X] = M'(0) = \lambda$

$E[X^2] = M''(0) = \lambda + \lambda^2$

$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$

179 モーメント母関数 $M(t)$ は，$|t| < 1$ のとき

$$M(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} e^{(t-1)x}\,dx$$
$$= \frac{1}{t-1}\left[e^{(t-1)x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{1-t}$$
$$= 1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots$$

これが $M(t)$ のマクローリン展開になっているから

$\frac{\mu_k}{k!} = 1 \qquad \therefore \quad \mu_k = k!$

4　補章関連

180
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$$
$$= \lambda\left\{\left[x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)dx\right\}$$
$$= \lambda\left\{0 + \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}\right\} = \frac{1}{\lambda}$$
$$E[X^2] = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx$$
$$= \lambda\left\{\left[x^2\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)dx\right\}$$
$$= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

181 3.388

5　いろいろな問題

182 (1) $P(X=0) = e^{-0.2} = 0.8187$

(2) $P(X=4) = e^{-0.2} \cdot \frac{0.2^4}{4!} = 0.0000546$

(3) $\left\{P(X=0)\right\}^5 = \left(e^{-0.2}\right)^5 = 0.3679$

(4) ${}_3C_1\, e^{-0.2} \cdot 0.2 \cdot (e^{-0.2})^2 = 0.3293$

183 $E[X] = \frac{7}{3}$, $E[X^2] = 6$, $V[X] = \frac{5}{9}$ より

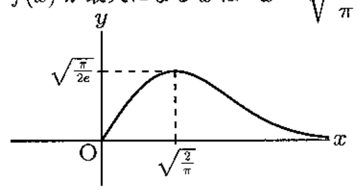
$\sqrt{V[X]} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

184 (1) $P(X \leqq 1) = \int_0^1 \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4}x^2}\,dx$

$= \left[-e^{-\frac{\pi}{4}x^2}\right]_0^1 = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}$

(2) $f'(x) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{4}x^2}\left(1 - \frac{\pi}{2}x^2\right)$

$f(x)$ が最大になる x は　$x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$



(3) 分布関数 $F(x)$ は $x \geqq 0$ のとき

$F(x) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}x^2}$

$F(x) = \frac{2}{3}$ より　$x = \sqrt{\frac{4}{\pi}\log 3}$

4章　推定と検定

1　母数の推定

Basic

185 5.38

186 $u^2 = 0.02788$

187 $18.02 \leqq \mu \leqq 23.02$

188 $9.86 \leqq \mu \leqq 11.14$

189 $6.25 \leqq \mu \leqq 6.63$

190 標本比率の平均 0.65　標準偏差 0.0275

確率 0.0344

191 $0.01 \leqq p \leqq 0.04$

192 $0.504 \leqq p \leqq 0.616$

193 4269 以上

Check

194 $164.1 \leqq \mu \leqq 170.7$　⇨187

195 $2.53 \leqq \mu \leqq 4.67$　⇨188

196 $47.2 \leqq \mu \leqq 57.4$　⇨189

197 標本比率の平均 0.75　標準偏差 0.0194

確率 0.1515　⇨190

198 $0.015 \leqq p \leqq 0.045$　⇨191,192

199 1537 人以上　⇨193

Step up

200 $\sigma = 15$, $\alpha = 0.05$ より

$2 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \cdot 1.960 \leqq 2$

$n \geqq 864.4$　　$\therefore$ 865 人以上

201 $\sigma = 10$, $\alpha = 0.01$ より

$2 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \cdot 2.576 \leqq 4$

$n \geqq 165.89$　　$\therefore$ 166 人以上

2　仮説検定

Basic

202 (1) $H_0 : p = \frac{1}{6}$,　$H_1 : p > \frac{1}{6}$

(2) 5 回のうち 3 回以上 1 の目が出る確率は

${}_5C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5 + {}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{5}{6} + {}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$

$= 0.03549$

H_0 は棄却され，p は $\frac{1}{6}$ より大きいといえる．

203 $H_0 : \mu = 116.2$,　$H_1 : \mu \neq 116.2$

$t = 1.743$

自由度 9 の t 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると