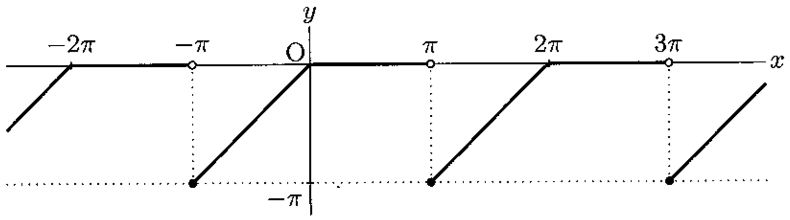
Basic

140 積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos m\pi x \cos n\pi x \, dx$ の値を求めよ．ただし，m，n は自然数とする． →教 p.76 問・1

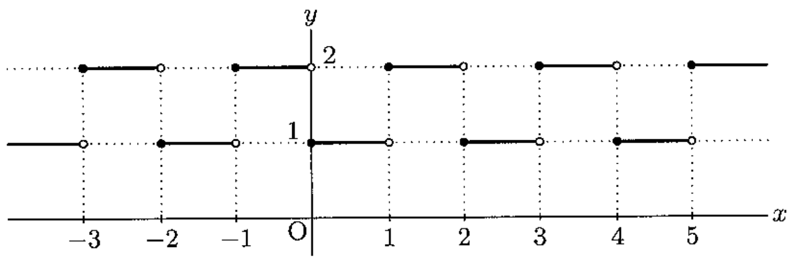
141 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ． →教 p.79 問・2

$$f(x) = \begin{cases} x & (-\pi \leqq x < 0) \\ 0 & (0 \leqq x < \pi) \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

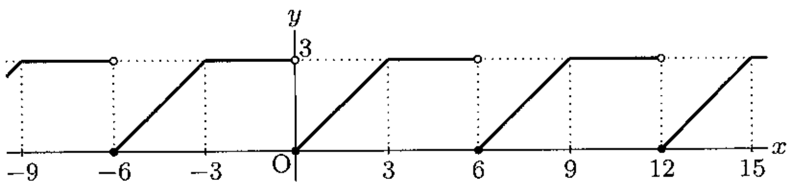


142 次の関数のフーリエ級数を求めよ． →教 p.82 問・3

(1) $f(x) = \begin{cases} 2 & (-1 \leqq x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x < 1) \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x)$

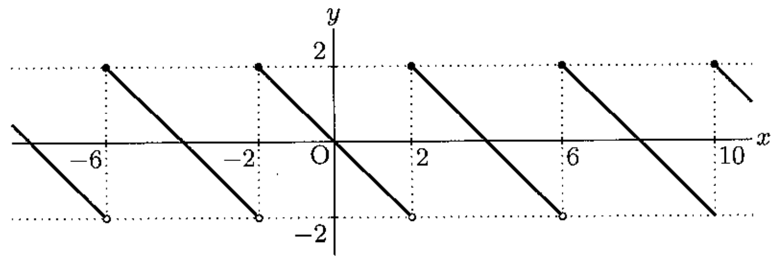


(2) $g(x) = \begin{cases} 3 & (-3 \leqq x < 0) \\ x & (0 \leqq x < 3) \end{cases}, \quad g(x+6) = g(x)$

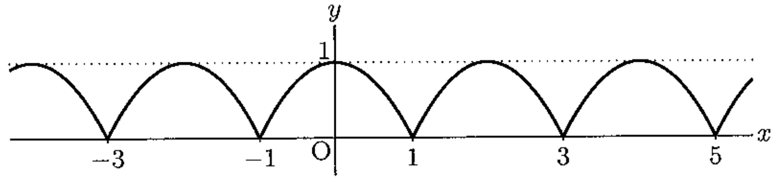


143 次の関数のフーリエ級数を求めよ． →教 p.84 問・4

(1) $f(x) = -x \quad (-2 \leqq x < 2), \quad f(x+4) = f(x)$



(2) $g(x) = 1 - x^2 \quad (-1 \leqq x < 1), \quad g(x+2) = g(x)$

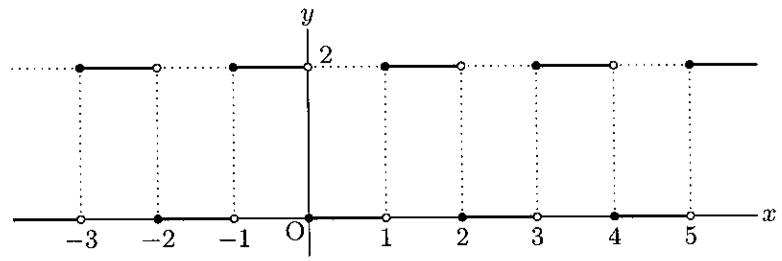


144 問題 141 のフーリエ級数を用いて，次の公式を導け． →教 p.86 問・5

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

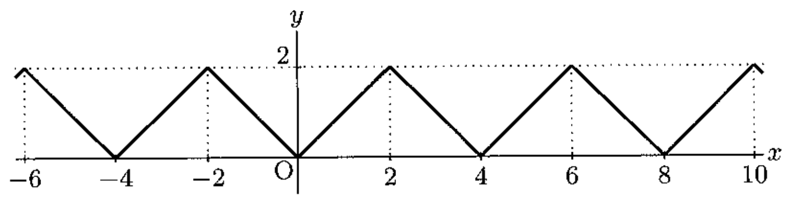
145 次の周期 2 の関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ． →教 p.89 問・6

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (-1 \leqq x < 0) \\ 0 & (0 \leqq x < 1) \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x)$$



146 次の周期 4 の関数 $f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ． →教 p.89 問・7

$$f(x) = |x| \quad (-2 \leqq x < 2), \quad f(x+4) = f(x)$$

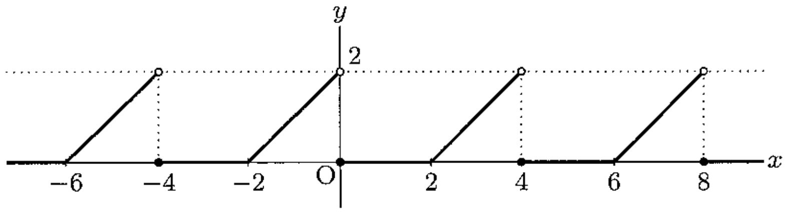


Check

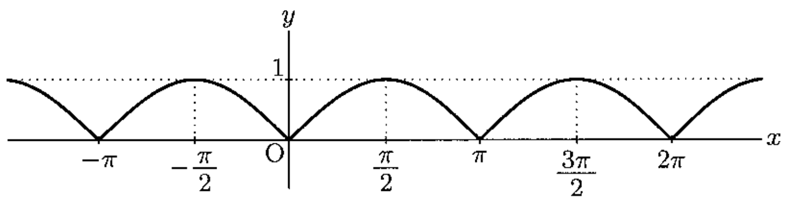
147 次の周期関数のフーリエ級数を求めよ．

(1) $f(x)=\begin{cases} -2 & (-\pi \leqq x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x < \pi) \end{cases}$ ，$f(x+2\pi)=f(x)$

(2) $g(x)=\begin{cases} x+2 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (0 \leqq x < 2) \end{cases}$ ，$g(x+4)=g(x)$



(3) $h(x)=|\sin x|\ \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$，$h(x+\pi)=h(x)$



148 問題 147 (1) の結果を用いて，次の公式を導け．

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

149 次の周期関数の複素フーリエ級数を求めよ．

(1) $f(x)=2x+1\ \ (-1 \leqq x < 1)$，$f(x+2)=f(x)$

(2) $g(x)=\begin{cases} -1 & (-3 \leqq x < 0) \\ 1 & (0 \leqq x < 3) \end{cases}$ ，$g(x+6)=g(x)$

Step up

例題 $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で

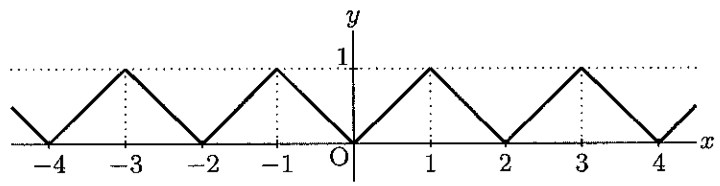
$$x=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\pi x$$

が成り立つように c_n を定めよ．

解 右辺は周期 2 の偶関数となるから

$$f(x)=\begin{cases} -x & (-1<x<0) \\ x & (0 \leqq x \leqq 1) \end{cases},\quad f(x+2)=f(x)$$

とし，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x)=x$ を満たす周期 2 の偶関数 $f(x)$ を考える．



$f(x)$ のフーリエ係数を求めると

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$
$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,dx=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$$
$$=2\left[\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1-2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right]_0^1$$
$$=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}$$

$n \neq 0$ のとき，$c_n=a_n$ だから

$$c_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (n=0) \\ \dfrac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2} & (n \neq 0) \end{cases}$$ //

150 $0 \leqq x < 1$ の範囲で

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$$

が成り立つように c_n を定めよ．

周期 2 の奇関数で考える．このとき，$x=1$ で連続にならないから，$0 \leqq x < 1$ となっている．

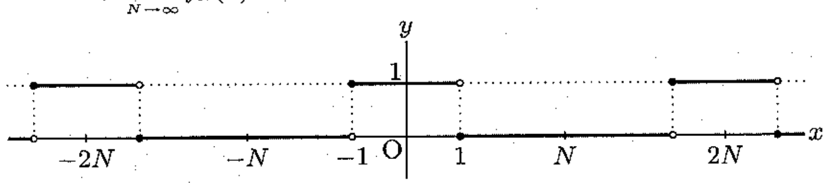
例題 N を1より大きい整数とする．周期 $2N$ の関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (-1\leqq x<1)\\ 0 & (-N\leqq x<-1,\ 1\leqq x<N)\end{cases},\quad f(x+2N)=f(x)$$

の有限フーリエ余弦級数

$$f_N(x)=c_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{N}$$

について，$\lim_{N\to\infty}f_N(x)$ を積分で表せ．



解 $f(x)$ は周期 $2N$ の偶関数だから　$b_n=0$

$$c_0=\frac{1}{N}\int_0^N f(x)\,dx=\frac{1}{N}\int_0^1 dx=\frac{1}{N}$$

$$a_n=\frac{2}{N}\int_0^N f(x)\cos\frac{n\pi x}{N}\,dx=\frac{2}{N}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{N}\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{N}$$

よって　$f_N(x)=\dfrac{1}{N}+\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{N}\cos\frac{n\pi x}{N}$

$u_n=\dfrac{n\pi}{N}$，$\Delta u_n=u_n-u_{n-1}=\dfrac{\pi}{N}$ とおくと

$$f_N(x)=\frac{1}{N}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin u_n}{u_n}\cos u_n x\cdot\Delta u_n$$

したがって

$$\lim_{N\to\infty}f_N(x)=0+\frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin u_n}{u_n}\cos u_n x\cdot\Delta u_n$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\cos ux\,du \qquad //$$

定積分の定義
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)\,\Delta x_n$

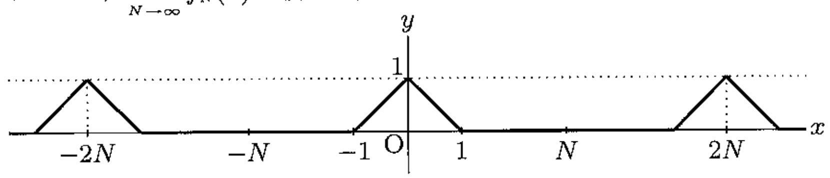
151 N を1より大きい整数とする．周期 $2N$ の関数

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (1<|x|\leqq N)\end{cases},\quad f(x+2N)=f(x)$$

の有限フーリエ余弦級数

$$f_N(x)=c_0+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\frac{n\pi x}{N}$$

について，$\lim_{N\to\infty}f_N(x)$ を積分で表せ．



2 フーリエ変換

まとめ

- **フーリエ変換**

$$F(u)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-iux}dx$$

- **逆フーリエ変換**

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\,e^{iux}du$$

- **フーリエの積分定理**

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\mathcal{F}^{-1}[F(u)]$$

特に，$f(x)$ が x で連続ならば　$f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(u)]$

- **フーリエ余弦変換**　$f(x)$ が偶関数のとき

$$F(u)=2\int_0^{\infty}f(x)\cos ux\,dx$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F(u)\cos ux\,du \qquad (f(x)\text{ が }x\text{ で連続のとき})$$

- **フーリエ正弦変換**　$f(x)$ が奇関数のとき，フーリエ正弦変換を $S(u)$ とおくと

$$S(u)=2\int_0^{\infty}f(x)\sin ux\,dx \qquad (S(u)=iF(u))$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S(u)\sin ux\,du \qquad (f(x)\text{ が }x\text{ で連続のとき})$$

- **フーリエ変換の性質**　$\mathcal{F}[f(x)]=F(u)$，$\mathcal{F}[f_j(x)]=F_j(u)$ $(j=1,\ 2)$ のとき

$\mathcal{F}[c_1f_1(x)+c_2f_2(x)]=c_1F_1(u)+c_2F_2(u)$　　(c_1, c_2 は定数)

$\mathcal{F}[f(x-a)]=e^{-iau}F(u)$　　(a は実数)

$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)]=F(u-a)$　　(a は実数)

$\mathcal{F}[f(ax)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{u}{a}\right)$　　(a は0でない実数)

$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)]=(iu)^nF(u)$　　(n は自然数)

$\mathcal{F}[(-ix)^nf(x)]=F^{(n)}(u)$　　(n は自然数)

- **フーリエ変換の公式**

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{u^2}{4a}} \qquad (a\text{ は正の定数})$$

- **たたみこみ**

$$(f*g)(x)=f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

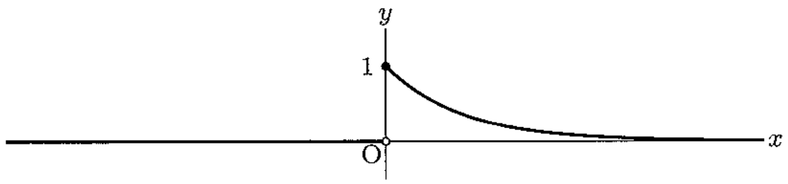
- **たたみこみのフーリエ変換**　$\mathcal{F}[f(x)]=F(u)$，$\mathcal{F}[g(x)]=G(u)$ のとき

$$\mathcal{F}[f(x)*g(x)]=F(u)\,G(u)$$

Basic

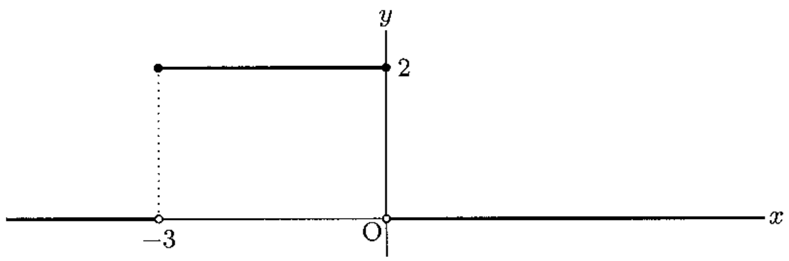
152 次の関数のフーリエ変換を求めよ． →教p.92 問·1

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

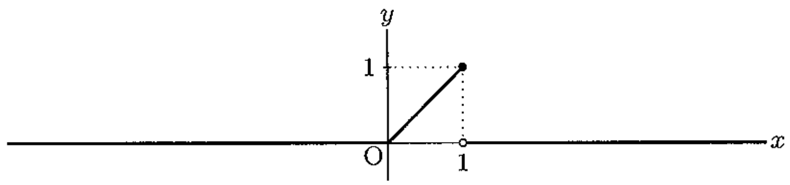


153 次の関数のフーリエ変換を求めよ． →教p.92 問·2

(1) $f(x)=\begin{cases} 2 & (-3 \leqq x \leqq 0) \\ 0 & (x<-3,\ x>0) \end{cases}$



(2) $g(x)=\begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (x<0,\ x>1) \end{cases}$



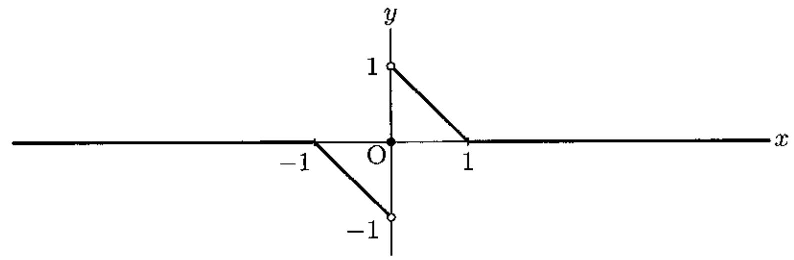
154 問題 152 の関数にフーリエの積分定理を適用して，次の等式を証明せよ． →教p.94 問·3

(1) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-iu}{1+u^2}\, e^{iux}\, du=\begin{cases} e^{-x} & (x>0) \\ \dfrac{1}{2} & (x=0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du=\pi$

155 次の関数のフーリエ正弦変換を求めよ． →教p.95 問·4

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 & (-1 \leqq x<0) \\ -x+1 & (0<x \leqq 1) \\ 0 & (x<-1,\ x=0,\ x>1) \end{cases}$$



156 次の公式を証明せよ．ただし，a は 0 でない実数とする． →教p.97 問·5

$$\mathcal{F}[f(ax)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{u}{a}\right)$$

157 問題 153 の $f(x)$ と $g(x)$ について，$\mathcal{F}[f(x)*g(x)]$ を求めよ． →教p.98 問·6

158 公式 $\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right]=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{u^2}{4a}}$ を用いて，次の関数のフーリエ変換を求めよ． →教p.98 問·7

(1) $e^{-\frac{x^2}{4}}$　　(2) $xe^{-\frac{x^2}{4}}$　　(3) $x^2e^{-\frac{x^2}{4}}$

159 $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-3u^2}\right]$ を求めよ． →教p.98 問·8

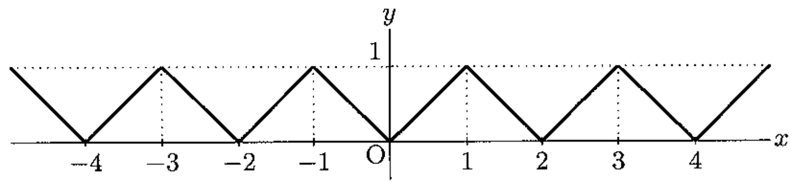
160 次の等式を証明せよ． →教p.99 問·9

(1) $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{4}} * xe^{-\frac{x^2}{4}}\right]=-8\pi iu\,e^{-2u^2}$

(2) $e^{-\frac{x^2}{4}} * xe^{-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,xe^{-\frac{x^2}{8}}$

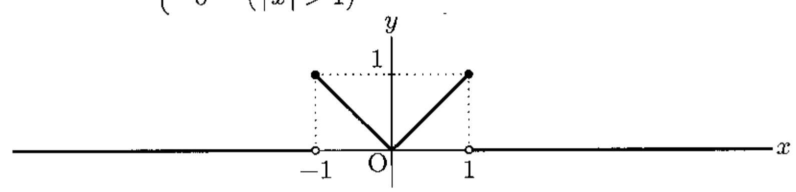
161 次の関数のスペクトルを求めよ． →教p.101 問·10

$$f(x)=|x|\ \ (|x| \leqq 1),\quad f(x+2)=f(x)$$



162 次の関数のスペクトルを求めよ． →教p.102 問·11

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$



Check

163 次の関数のフーリエ変換を求めよ.

(1) $f(x)=\begin{cases} 1 & (1 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (x<1,\ x>2) \end{cases}$

(2) $g(x)=\begin{cases} 2-x & (0 \leqq x < 2) \\ 0 & (x<0,\ x \geqq 2) \end{cases}$

(3) $h(x)=\begin{cases} e^{3x} & (x \leqq 0) \\ 0 & (x>0) \end{cases}$

164 問題 163 (1) の関数にフーリエの積分定理を適用して，次の等式を証明せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du=\pi$$

165 次の関数のフーリエ正弦変換を求めよ.

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{3} & (|x| \leqq 2) \\ 0 & (|x|>2) \end{cases}$$

166 $\mathcal{F}[e^{-|x|}]=\dfrac{2}{1+u^2}$ とフーリエ変換の性質を用いて，$\mathcal{F}[e^{-a|x|}]$ を求めよ．ただし，$a>0$ とする.

167 問題 166 の結果を用いて，$\mathcal{F}[e^{-|x|} * e^{-2|x|}]$ を求めよ.

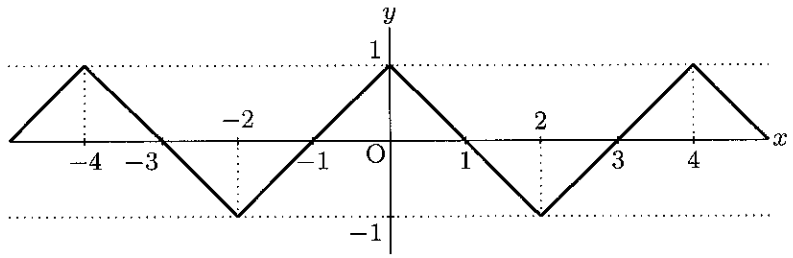
168 次の等式を証明せよ．ただし，a, b は正の定数とする.

(1) $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{a}} * xe^{-\frac{x^2}{b}}\right]=-\dfrac{\pi b\sqrt{ab}}{2}iu\,e^{-\frac{a+b}{4}u^2}$

(2) $e^{-\frac{x^2}{a}} * xe^{-\frac{x^2}{b}}=\dfrac{b\sqrt{ab\pi}}{(a+b)\sqrt{a+b}}xe^{-\frac{x^2}{a+b}}$

169 次の関数のスペクトルを求めよ.

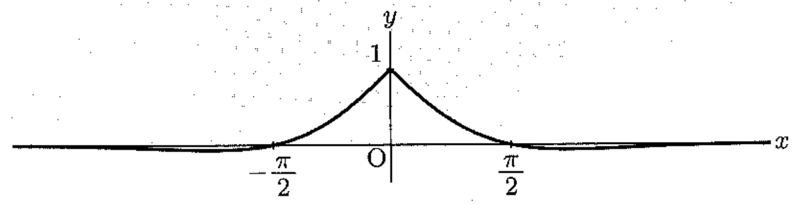
(1) $f(x)=1-|x|\ \ (|x| \leqq 2),\quad f(x+4)=f(x)$



(2) $g(x)=\begin{cases} 1-|x| & (|x| \leqq 2) \\ 0 & (|x|>2) \end{cases}$

Step up

例題 関数 $f(x)=e^{-x}\cos x\ (x \geqq 0)$ について，$f(x)$ が偶関数になるように定義域を実数全体に拡張したときのフーリエ余弦変換を求めよ.



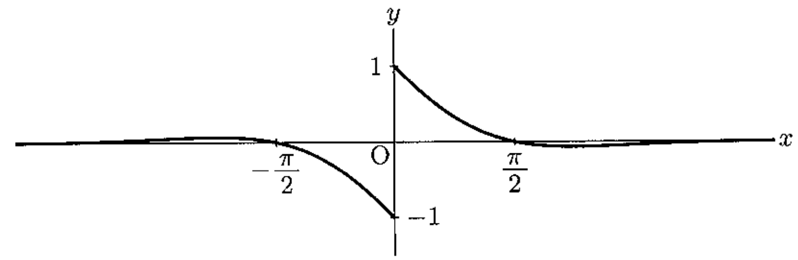
解

$$\begin{aligned} F(u)&=2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\cos ux\,dx \\ &=\int_0^{\infty} e^{-x}\{\cos(u+1)x+\cos(u-1)x\}dx \\ &=\frac{1}{1+(u+1)^2}+\frac{1}{1+(u-1)^2}=\frac{2(u^2+2)}{u^4+4} \end{aligned}$$ //

$\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}$

$\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$

170 関数 $f(x)=e^{-x}\cos x\ (x \geqq 0)$ について，$f(x)$ が奇関数になるように定義域を実数全体に拡張したときのフーリエ正弦変換を求めよ.



例題 $f(x)$ が奇関数ならば，フーリエ変換 $F(u)=\mathcal{F}[f(x)]$ も奇関数であることを証明せよ.

解 $f(x)$ は奇関数だから　$F(u)=-2i\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\sin ux\,dx$

$\sin(-ux)=-\sin ux$ より

$$F(-u)=-2i\int_0^{\infty} f(x)\sin(-u)x\,dx=2i\int_0^{\infty} f(x)\sin ux\,dx=-F(u)$$

よって，$F(u)$ は奇関数である. //

171 $f(x)$ が偶関数ならば，フーリエ変換 $F(u)=\mathcal{F}[f(x)]$ も偶関数であることを証明せよ.

172 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(u)$ とするとき，$f(-x)$ のフーリエ変換は $F(-u)$ となることを証明せよ.

3章 フーリエ解析

Plus

1——フーリエ変換と逆フーリエ変換

関数 $f(x)$ に対して

$$\tilde{f}(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

とおくと，フーリエの積分定理より，フーリエ変換と逆フーリエ変換は

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx,\quad \tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}\,du \qquad (1)$$

x と u を交換すると

$$\tilde{f}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{iux}\,dx,\quad F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iux}\,du \qquad (2)$$

これから

$$\tilde{f}(-u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iux}\,dx,\quad F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(-u)e^{iux}\,du \qquad (3)$$

したがって，$f(x)$ のフーリエ変換を $F(u)$ とすると，$F(x)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[F(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-iux}\,dx=2\pi\tilde{f}(-u)$$

(1), (2), (3) のように，フーリエ変換と逆フーリエ変換は，x と u の交換について対称性をもっている．

例題 $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ のフーリエ変換を利用して，$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ のフーリエ変換を求めよ．

解

$$\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx=\int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-iux}\,dx=\left[\frac{1}{-iu}e^{-iux}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{e^{-iu}-e^{iu}}{-iu}=\frac{2}{u}\cdot\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}=\frac{2\sin u}{u}$$

$\tilde{f}(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ とおくと，フーリエの積分定理より

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin u}{u}e^{iux}\,du$$

x と u を交換すると

$$\tilde{f}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin x}{x}e^{iux}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{iux}\,dx$$

したがって

$$\mathcal{F}[g(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-iux}\,dx=\pi\tilde{f}(-u)=\begin{cases}\pi & (|u|<1)\\ \dfrac{\pi}{2} & (|u|=1)\\ 0 & (|u|>1)\end{cases} \qquad //$$

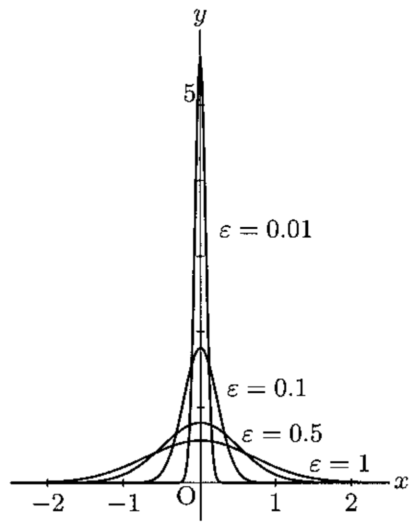
173 $f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ のフーリエ変換を利用して，$g(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ のフーリエ変換を求めよ．

2——デルタ関数と周期的デルタ関数

平均 0, 分散 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ の正規分布では

$$G_\varepsilon(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}$$

の形の確率密度関数をもつことが知られている．ただし，ε は正の数とする．いくつかの ε について，この関数のグラフをかくと右の図のようになる．



デルタ関数 $\delta(x)$ は $G_\varepsilon(x)$ の $\varepsilon\to+0$ としたときの極限になり，次の性質を満たす．

(I) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1$

(II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\delta(x)\,dx=f(0)$

デルタ関数は偶関数である．

(III) $\delta(-x)=\delta(x)$

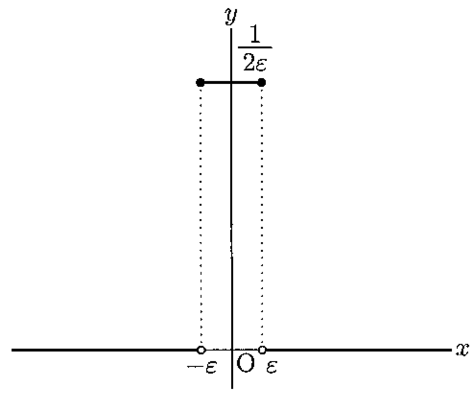
また，そのフーリエ変換とたたみこみについて，次の公式が成り立つ．

(IV) $\mathcal{F}[\delta(x)]=1$

(V) $f*\delta=\delta*f=f$

174 デルタ関数は次の関数 $\varphi_\varepsilon(x)$ の $\varepsilon\to+0$ のときの極限と考えることもできる．

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & (|x|\leqq\varepsilon)\\ 0 & (|x|>\varepsilon)\end{cases}$$



$\varphi_\varepsilon(x)$ について，次の性質を証明せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\varepsilon(x)\,dx=1$

(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\varphi_\varepsilon(x)\,dx=f(0)$

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\mathcal{F}[\varphi_\varepsilon(x)]=1$

(IV) に反転公式を形式的に適用すると

$$\delta(x)=\mathcal{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}du \qquad (1)$$

(1) はふつうの意味では成り立たないが，関数と積分の意味を拡張して数学的に取り扱うことができる．このように拡張した関数は超関数と呼ばれている．

(1) で x と u を入れ換え，u のところを $-u$ に変えると

$$\delta(-u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\,dx = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[1]$$

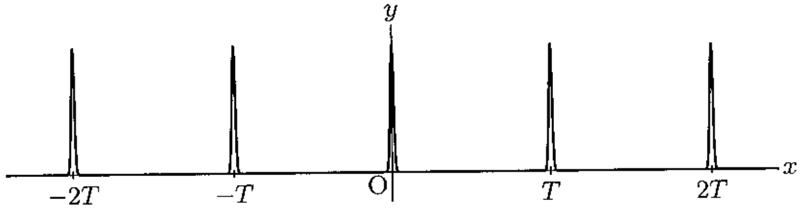
(III) を用いると，次の公式が得られる．

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(u) \qquad (2)$$

T を正の定数とするとき，デルタ関数が周期 T の間隔で現れる周期関数を**周期的デルタ関数**といい，$\delta_T(x)$ で表す．すなわち

$$\delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nT) \qquad (3)$$

周期的デルタ関数は下図のような関数の極限と考えられる．



例題 周期的デルタ関数 $\delta_T(x)$ $(T>0)$ の複素フーリエ級数を求めよ．

解 $\delta_T(x)$ は周期 T の周期関数だから，次のように表される．

$$\delta_T(x) = \delta(x) \quad \left(-\frac{T}{2} \leqq x < \frac{T}{2}\right), \quad \delta_T(x+T) = \delta_T(x)$$

$f(x) = e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}$ とおくと，デルタ関数の性質 (II) より

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(x)\, e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}dx = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(x)\, e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(x)\, f(x)\,dx = \frac{1}{T}\cdot f(0) = \frac{1}{T}$$

したがって，$\delta_T(x)$ の複素フーリエ級数は $\displaystyle \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2n\pi x}{T}}$ //

175 T を正の定数とするとき，周期的デルタ関数 $\delta_T(x)$ のフーリエ変換を求めよ．

3—補章関連

フーリエ級数とフーリエ変換

→教p.160

フーリエ級数は，周期関数の性質を調べるために有用な方法であったが，周期をもたない関数を解析するには，フーリエ変換が用いられる．

フーリエ級数とフーリエ変換の関係を考えてみると，フーリエ変換は，周期関数のフーリエ級数において，周期を無限大にしたときのフーリエ係数にあたるものと考えることができる．

このことについて，具体的な関数を例に考えてみる．

例題 関数

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (x < -1,\ x > 1) \end{cases}$$

を周期 $2l$（l は 2 以上の整数）の関数と考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 正の数 N について，$f(x)$ の第 $-Nl$ 項から第 Nl 項までの有限複素フーリエ級数 $\displaystyle\sum_{n=-Nl}^{Nl} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ を求めよ．

(2) $u_n = \dfrac{n\pi}{l}$，$\Delta u_n = u_n - u_{n-1}$ とおくことで，$\displaystyle\lim_{l\to\infty}\sum_{n=-Nl}^{Nl} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ を積分で表せ．

解 (1) $\displaystyle c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{2l}\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx = \frac{1}{l}$

$n \neq 0$ のとき

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx = \frac{1}{2l}\int_{-1}^{1}(x+1)\, e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx$$

$$= \frac{1}{2l}\left(-\frac{2l}{in\pi}\, e^{-i\frac{n\pi}{l}} + \frac{l}{in\pi}\int_{-1}^{1} e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(2in\pi e^{-i\frac{n\pi}{l}} - l\left(e^{i\frac{n\pi}{l}} - e^{-i\frac{n\pi}{l}}\right)\right)$$

したがって

$$\sum_{n=-Nl}^{Nl} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = \frac{1}{l} + \sum_{\substack{n=-Nl\\ n\neq 0}}^{Nl} \frac{1}{2n^2\pi^2}\left(2in\pi e^{-i\frac{n\pi}{l}} - l\left(e^{i\frac{n\pi}{l}} - e^{-i\frac{n\pi}{l}}\right)\right) e^{i\frac{n\pi x}{l}}$$

(2) $\displaystyle\lim_{l\to\infty}\sum_{n=-Nl}^{Nl} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{\substack{n=-Nl\\ n\neq 0}}^{Nl} \frac{2iu_n e^{-iu_n} - \left(e^{iu_n} - e^{-iu_n}\right)}{u_n^2}\, e^{iu_n x}\Delta u_n$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi}^{N\pi} \frac{2iue^{-iu} - \left(e^{iu} - e^{-iu}\right)}{u^2}\, e^{iux}\,du$$ //

176 例題において，$N\to\infty$ とすることにより，$f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ．

フーリエ級数と偏微分方程式

→教p.175

177 次の条件を満たす熱伝導方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < 2,\ t > 0)$ の解を求めよ．

$$u(0,\ t) = u(2,\ t) = 0, \quad u(x,\ 0) = x(2-x)$$

フーリエ変換と偏微分方程式

→教p.178

178 次の偏微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (*)$$

(1) $u(x,\ t)$ の x についてのフーリエ変換を $U(\xi,\ t)$ とおくとき，U の満たす方程式を求めよ．

(2) $U(\xi,\ t) = F(\xi)e^{i\xi t} + G(\xi)e^{-i\xi t}$ と表されることを証明せよ．ただし，F, G は任意の関数である．

(3) $\mathcal{F}[f(x)] = F(\xi)$, $\mathcal{F}[g(x)] = G(\xi)$ とするとき，$(*)$ の解は，次のように表されることを証明せよ．

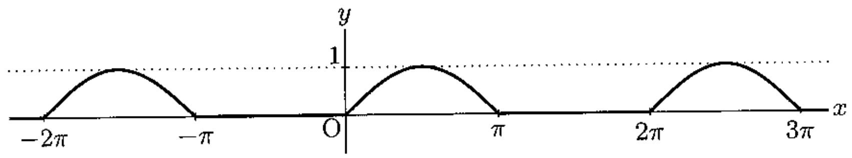
$$u(x,\ t) = f(x+t) + g(x-t)$$

4—いろいろな問題

179 周期関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leqq x < \pi) \\ 0 & (-\pi \leqq x < 0) \end{cases}, \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

について，次の問いに答えよ．



(1) $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

(2) (1) とフーリエ級数の収束定理を用いて，次の級数の和を求めよ．

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \cdots$$

180 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \qquad (m = 1,\ 2,\ \cdots)$$

とすると，$f(x)$ は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x + b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right) \qquad ①$$

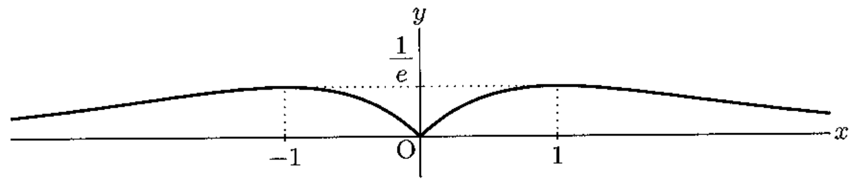
と展開できる．

このとき，$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を ① 式で $l = \frac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} + \cdots$$

の値を求めよ．（東京大改）

181 関数 $f(x) = |x|e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ．



182 次の関数について，以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 0 & (x < 0,\ x > 1) \end{cases}$$

(1) $f(x)$ のフーリエ変換を求めよ．

(2) フーリエの積分定理を適用して，次の等式を証明せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u - u\cos u}{u^3}\,du = \frac{\pi}{2}$$

183 周期 2π の周期関数 $f(x)$ のフーリエ係数を c_0, a_n, b_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の定積分を $\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ とフーリエ係数で表せ．

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x) - \left(c_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right)\right\}^2 dx$$

(2) 次の**ベッセルの不等式** を証明せよ．

$$2c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$$

よって

$$x(t) = \frac{1}{3}\Big\{U(t-2) - e^{-3(t-2)}U(t-2)\Big\}$$
$$= \frac{1}{3}(1 - e^{-3t+6})U(t-2)$$

138 $\mathcal{L}[i(t)] = I(s)$ とおく.

(1) 方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$LsI(s) + RI(s) = 1 \qquad \therefore\ I(s) = \frac{1}{Ls+R}$$

よって　$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{Ls+R}\right] = \dfrac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$

(2) 方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{E}{s}$$
$$I(s) = \frac{E}{s(Ls+R)} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{L}{Ls+R}\right)$$

よって　$i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

(3) 方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$I(s) = \frac{\omega}{(Ls+R)(s^2+\omega^2)}$$
$$= \frac{\omega}{R^2+\omega^2L^2}\left(\frac{L^2}{Ls+R} - \frac{Ls-R}{s^2+\omega^2}\right)$$
$$= \frac{\omega}{R^2+\omega^2L^2}\left(L\frac{1}{s+\frac{R}{L}} - L\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{R}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

よって

$$i(t) = \frac{1}{R^2+\omega^2L^2}\left(\omega Le^{-\frac{R}{L}t} - \omega L\cos\omega t + R\sin\omega t\right)$$

139 (1) $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s),\ \mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s)$

(2) $\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)] = -F'(s)$

$\mathcal{L}[tf'(t)] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f'(t)] = -F(s) - sF'(s)$

$\mathcal{L}[tf''(t)] = -\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}[f''(t)]$

$= -2sF(s) - s^2F'(s)$

(3) 方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$-2sF(s) - s^2F'(s) - 3(F(s) + sF'(s)) - sF(s) - 2F'(s) - 3F(s) = 0$$
$$(s+1)(s+2)F'(s) + 3(s+2)F(s) = 0$$

よって　$(s+1)\dfrac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$

(4) (3) の変数分離形微分方程式を解くと

$$F(s) = \frac{c}{(s+1)^3} \qquad (c\text{ は任意定数})$$
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{c}{2}t^2e^{-t} = Ct^2e^{-t}$$

(C は任意定数)

3章 フーリエ解析

1 フーリエ級数

Basic

140 $0\ (m \neq n),\ 1\ (m = n)$

141 $-\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$

142 (1) $\dfrac{3}{2} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x$

(2) $\dfrac{9}{4} - 3\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3} + \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)$

143 (1) $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$

(2) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi x$

144 フーリエ級数に $x = 0$ を代入し，フーリエ級数の収束定理を用いよ.

145 $1 + \dfrac{i}{\pi}\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{in\pi x}$

146 $1 - \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}e^{i\frac{n\pi x}{2}}$

Check

147 (1) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$

(2) $\dfrac{1}{2} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$

(3) $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$

⇒141,142,143

148 フーリエ級数に $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入し，フーリエ級数の収束定理を用いよ.

⇒144

149 (1) $1 + \dfrac{2i}{\pi}\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{in\pi x}$

(2) $-\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{i\frac{n\pi x}{3}}$

⇒145,146

Step up

150 周期 2 の奇関数ならば，右辺の級数で表すことができる. $f(x) = x\ (-1 \leqq x < 1),\ f(x+2) = f(x)$ とすると，$f(x)$ は周期 2 の奇関数となり，$0 \leqq x < 1$ の範囲で $f(x) = x$ が成り立つ.

$f(x)$ のフーリエ係数を求める.

$$c_n = b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx$$
$$= 2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx$$
$$= 2\left[\frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1 + 2\int_0^1\frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx$$
$$= \frac{-2\cos n\pi}{n\pi} + \left[\frac{2\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

151 $f(x)$ は周期 $2N$ の偶関数だから　$b_n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{N}\int_0^N f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{N}\int_0^1(1-x)\,dx = \frac{1}{2N}$$
$$a_n = \frac{2}{N}\int_0^N f(x)\cos\frac{n\pi x}{N}dx$$
$$= \frac{2}{N}\int_0^1(1-x)\cos\frac{n\pi x}{N}dx$$
$$= \frac{2}{N}\left\{\left[(1-x)\cdot\frac{N}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{N}\right]_0^1 + \frac{N}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{N}dx\right\}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{N}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{N}\right]_0^1$$
$$= \frac{2N}{n^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{N}\right)$$
$$f_N(x) = \frac{1}{2N} + \frac{2N}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{N}}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{N}$$

$u_n = \dfrac{n\pi}{N},\ \varDelta u_n = u_n - u_{n-1} = \dfrac{\pi}{N}$ とおくと

$$f_N(x) = \frac{1}{2N} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1-\cos u_n}{u_n^2}\cos u_n x\,\varDelta u_n$$

よって

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos u}{u^2}\cos ux\,du$$

2 フーリエ変換

Basic

152 $\dfrac{1-iu}{1+u^2}$

153 (1) $\dfrac{2(1-e^{3iu})i}{u}$　　(2) $\dfrac{(1+iu)e^{-iu}-1}{u^2}$

154 (1) $x = 0$ で不連続であることに注意して，フーリエの積分定理を適用せよ.

(2) (1) の $x = 0$ のときの等式の両辺の実部を比較せよ.

155 $\dfrac{2(u - \sin u)}{u^2}$

156 $\mathcal{F}[f(ax)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\,e^{-iux}dx$ より，$t = ax$ とおいて置換積分を行え. $a < 0$ の場合，$x : -\infty \to \infty$ のとき，$t : \infty \to -\infty$ となることに注意せよ.

157 $\dfrac{2(1-e^{3iu})\big((1+iu)e^{-iu}-1\big)i}{u^3}$

158 (1) $2\sqrt{\pi}\,e^{-u^2}$　　(2) $-4\sqrt{\pi}\,iue^{-u^2}$

(3) $4\sqrt{\pi}(1-2u^2)e^{-u^2}$

159 $\dfrac{1}{2\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{x^2}{12}}$

160 (1) 導関数のフーリエ変換の性質とたたみこみのフーリエ変換を用いよ.

(2) 導関数のフーリエ変換の性質を用いて右辺をフーリエ変換し，(1) の右辺と比較せよ.

161 $S_f(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (\omega = 0) \\ -\dfrac{4}{\omega^2} & (\omega = (2k-1)\pi) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

ただし，$k = 1,\ 2,\ \cdots$

162 $S_f(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & (\omega = 0) \\ \dfrac{2(\omega\sin\omega + \cos\omega - 1)}{\pi\omega^2} & (\omega > 0) \end{cases}$

Check

163 (1) $\dfrac{e^{-2iu}-e^{-iu}}{u}i$ (2) $\dfrac{1-2iu-e^{-2iu}}{u^2}$

(3) $\dfrac{3+iu}{9+u^2}$ ⇒152,153

164 フーリエの積分定理を適用し，$x=1$ を代入せよ．

⇒154

165 $S(u)=\dfrac{4u\cos 2u-2\sin 2u}{3u^2}$ ⇒155

166 $\dfrac{2a}{a^2+u^2}$ ⇒156

167 $\dfrac{8}{(1+u^2)(4+u^2)}$ ⇒157

168 問題 160 と同様にせよ． ⇒158,159,160

169 (1) $S_f(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2}{\omega^2} & \left(\omega=\dfrac{2k-1}{2}\pi\right)\\ 0 & (\text{それ以外のとき})\end{cases}$

ただし，$k=1,\ 2,\ \cdots$

(2) $S_g(\omega)$

$$=\begin{cases}0 & (\omega=0)\\ \dfrac{2(1-\cos 2\omega-\omega\sin 2\omega)}{\pi\omega^2} & (\omega>0)\end{cases}$$

⇒161,162

Step up

170 $S(u)=2\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\sin ux\,dx$

$$=\int_0^\infty e^{-x}\{\sin(u+1)x+\sin(u-1)x\}dx$$
$$=\frac{u+1}{1+(u+1)^2}+\frac{u-1}{1+(u-1)^2}$$
$$=\frac{2u^3}{u^4+4}$$

171 $f(x)$ は偶関数だから

$$F(u)=2\int_0^\infty f(x)\cos ux\,dx$$

$\cos(-ux)=\cos ux$ だから

$$F(-u)=2\int_0^\infty f(x)\cos(-u)x\,dx$$
$$=2\int_0^\infty f(x)\cos ux\,dx=F(u)$$

よって，$F(u)$ は偶関数である．

172 $F(u)=\mathcal{F}[f(x)]=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iux}\,dx$

$$\mathcal{F}[f(-x)]=\int_{-\infty}^\infty f(-x)e^{-iux}\,dx$$
$$=\int_\infty^{-\infty} f(t)e^{-iu(-t)}(-1)dt\quad(-x=t)$$
$$=\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i(-u)t}\,dt=F(-u)$$

Plus

1 フーリエ変換と逆フーリエ変換

173 $\mathcal{F}[f(x)]=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iux}\,dx$

$$=2\int_0^\infty f(x)\cos ux\,dx=2\int_0^1(1-x)\cos ux\,dx$$
$$=2\left(\left[\frac{1-x}{u}\sin ux\right]_0^1+\frac{1}{u}\int_0^1\sin ux\,dx\right)$$
$$=2\left[-\frac{\cos ux}{u^2}\right]_0^1=\frac{2(1-\cos u)}{u^2}$$

$f(x)$ は連続だから，フーリエの積分定理より

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{2(1-\cos u)}{u^2}e^{iux}\,du$$

x と u を交換すると

$$f(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{2(1-\cos x)}{x^2}e^{iux}\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}e^{iux}\,dx$$

したがって

$$\mathcal{F}[g(x)]=\int_{-\infty}^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}e^{-iux}\,dx=\pi f(-u)$$
$$=\begin{cases}\pi(1-|u|) & (|u|\leqq 1)\\ 0 & (|u|>1)\end{cases}$$

2 デルタ関数と周期的デルタ関数

174 (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\varphi_\varepsilon(x)\,dx=\int_{-\varepsilon}^\varepsilon\frac{1}{2\varepsilon}\,dx=1$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^\varepsilon f(x)\,dx$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\cdot f(a)\cdot 2\varepsilon\quad(-\varepsilon<a<\varepsilon)$$

(定積分の平均値の定理)

$$\to f(0)\quad(\varepsilon\to+0)$$

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\mathcal{F}[\varphi_\varepsilon(x)]=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^\infty\varphi_\varepsilon(x)\,e^{-iux}dx$

(2) より 右辺 $=e^{-iu\cdot 0}=1$

175 フーリエ級数の収束定理より

$$\delta_T(x)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^\infty e^{i\frac{2n\pi x}{T}}$$

さらに

$$\mathcal{F}[\delta_T(x)]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^\infty\mathcal{F}\left[e^{i\frac{2n\pi x}{T}}\right]$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^\infty\mathcal{F}\left[e^{i\frac{2n\pi x}{T}}\cdot 1\right]$$

$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(u)$ とフーリエ変換の性質より

$$\mathcal{F}\left[e^{i\frac{2n\pi x}{T}}\cdot 1\right]=2\pi\delta\left(u-\frac{2n\pi}{T}\right)$$

よって

$$\mathcal{F}[\delta_T(x)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^\infty\delta\left(u-\frac{2n\pi}{T}\right)$$
$$=\frac{2\pi}{T}\delta_{\frac{2\pi}{T}}(u)$$

3 補章関連

176 $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{2iue^{-iu}-(e^{iu}-e^{-iu})}{u^2}e^{iux}du$

より $F(u)=\dfrac{2iue^{-iu}-(e^{iu}-e^{-iu})}{u^2}$

177 境界条件 $u(0,\ t)=u(2,\ t)=0$ を満たす解は

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^\infty C_ne^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

であることを用いよ．

$u(x,\ t)=$

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{16(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3}e^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

178 (1) $\dfrac{\partial^2U}{\partial t^2}=-\xi^2U$

(2) t についての斉次 2 階線形微分方程式であることを用いよ．

(3) $\mathcal{F}[f(x+t)]=e^{i\xi t}F(\xi)$ を用いよ．

4 いろいろな問題

179 (1) $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=2}^\infty\frac{1-(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$

$\left(=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx\right)$

(2) $f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続だから，フーリエ級数の収束定理と (1) より

$$1=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{\cos k\pi}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots\right)$$

よって

$$\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}-\cdots=\frac{\pi-2}{4}$$

180 $f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1}\cos 2mx$

値 $\dfrac{\pi-2}{4}$

181 $F(u)=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty|x|e^{-|x|}e^{-iux}dx$

$$=\int_{-\infty}^0(-x)e^xe^{-iux}dx+\int_0^\infty xe^{-x}e^{-iux}dx$$
$$=-\int_{-\infty}^0xe^{(1-iu)x}dx+\int_0^\infty xe^{-(1+iu)x}dx$$
$$=-\left[x\cdot\frac{e^{(1-iu)x}}{1-iu}\right]_{-\infty}^0+\int_{-\infty}^0\frac{e^{(1-iu)x}}{1-iu}dx$$
$$+\left[x\cdot\left(-\frac{e^{-(1+iu)x}}{1+iu}\right)\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{e^{-(1+iu)x}}{1+iu}dx$$

$$\lim_{x\to-\infty}xe^{(1-iu)x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}xe^x(\cos ux-i\sin ux)=0$$
$$\lim_{x\to\infty}xe^{-(1+iu)x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}xe^{-x}(\cos ux-i\sin ux)=0$$

したがって

$$F(u)=\left[\frac{e^{(1-iu)x}}{(1-iu)^2}\right]_{-\infty}^0+\left[-\frac{e^{-(1+iu)x}}{(1+iu)^2}\right]_0^\infty$$
$$=\frac{1}{(1-iu)^2}+\frac{1}{(1+iu)^2}=\frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$$

182 (1) $F(u)=\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,e^{-iux}dx$

$$=\int_0^1(1-x^2)\,e^{-iux}dx$$
$$=\frac{1}{iu}-\frac{2}{iu}\int_0^1x\,e^{-iux}dx$$
$$=-\frac{i}{u}-\frac{2e^{-iu}}{u^2}+\frac{2}{u^2}\int_0^1e^{-iux}dx$$
$$=\frac{-iu^2-2ue^{-iu}+2ie^{-iu}-2i}{u^3}$$
$$=\frac{2(\sin u-u\cos u)}{u^3}$$
$$+i\frac{2u\sin u+2\cos u-u^2-2}{u^3}$$

(2) $\dfrac{f(+0)+f(-0)}{2} = \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,du = \frac{1}{2}$$

両辺の実部を比較して

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u - u\cos u}{u^3}\,du = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u - u\cos u}{u^3}\,du = \frac{\pi}{2}$$

183 (1) $g(x) = c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

とおくと

$$\text{与式} = \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)-g(x)\}^2dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx - 2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\{g(x)\}^2dx \qquad ①$$

ここで

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,dx$$
$$= c_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right)$$
$$= 2\pi c_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)$$

また，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx = 0\ (m \neq n)$ 等を用いると

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{g(x)\}^2dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left\{c_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2\cos^2 nx + b_n^2\sin^2 nx)\right\}dx$$
$$= 2\pi c_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)$$

これらを①に代入すると

$$\text{与式} = \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx - \left(2\pi c_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right)$$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{f(x)-g(x)\Big\}^2dx \geqq 0$

(1) より

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx - \left(2\pi c_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right) \geqq 0$$

$N \to \infty$ とすれば，次の不等式が得られる．

$$2c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \leqq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$$

4章 複素関数

1 正則関数

Basic

184 実部，虚部，絶対値，共役複素数の順に

(1) 8，6，10，$8-6i$

(2) -1，-7，$5\sqrt{2}$，$-1+7i$

(3) $\dfrac{2}{13}$，$\dfrac{3}{13}$，$\dfrac{1}{\sqrt{13}}$，$\dfrac{1}{13}(2-3i)$

(4) $-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{2}(-1+i)$

185 $\mathrm{Re}(z) = x$，$\mathrm{Im}(z) = y$

$\mathrm{Re}(z_k) = x_k$，$\mathrm{Im}(z_k) = y_k$ $(k = 1,\ 2)$

とおくと

$z = x+yi$，$\overline{z} = x-yi$

$z_k = x_k + y_k i$，$\overline{z_k} = x_k - y_k i$

(1) $\mathrm{Re}(z_1 - z_2)$
$$= \mathrm{Re}((x_1+y_1i)-(x_2+y_2i))$$
$$= \mathrm{Re}((x_1-x_2)+(y_1-y_2)i)$$
$$= x_1 - x_2 = \mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)$$

(2) $\mathrm{Im}(z_1 + z_2)$
$$= \mathrm{Im}((x_1+y_1i)+(x_2+y_2i))$$
$$= \mathrm{Im}((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i)$$
$$= y_1 + y_2 = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$$

(3) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{x+yi}\right)$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{\mathrm{Re}(z)}{\{\mathrm{Re}(z)\}^2+\{\mathrm{Im}(z)\}^2}$$

(4) $\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}((x+yi)^2)$
$$= \mathrm{Im}((x^2-y^2)+2xyi)$$
$$= 2xy = 2\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)$$

(5) z が実数ならば　$z = \mathrm{Re}(z)$

よって　$|z| = |\mathrm{Re}(z)|$

逆に，$|z| = |\mathrm{Re}(z)|$ ならば

$x^2+y^2 = |z|^2 = |\mathrm{Re}(z)|^2 = x^2$

すなわち，$y = 0$ となり，z は実数である．

(6) z が純虚数ならば　$z = i\,\mathrm{Im}(z)$

よって　$|z| = |i\,\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Im}(z)|$

逆に，$|z| = |\mathrm{Im}(z)|$ ならば

$x^2+y^2 = |z|^2 = |\mathrm{Im}(z)|^2 = y^2$

すなわち，$x = 0$ となり，z は純虚数である．

186 (1) $\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$

(2) $2e^{\frac{11}{6}\pi i} = 2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi + i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

(3) $2e^{\frac{3}{2}\pi i} = 2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$

(4) $3e^{\pi i} = 3\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

187 (1) $|e^{-i\theta}| = |e^{i(-\theta)}| = |\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)|$
$$= \sqrt{\cos^2(-\theta)+\sin^2(-\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

(2) $\overline{e^{-i\theta}} = \overline{e^{i(-\theta)}} = \overline{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}$
$$= \overline{\cos\theta - i\sin\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

188 (1) $\sqrt{26}$　　(2) 10

189 $\overrightarrow{\mathrm{O}(z_1-z_2)} = \overrightarrow{\mathrm{O}z_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}(-z_2)}$ より

$$|z_1 - z_2| \leqq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$$

190 (1) 点 z を原点のまわりに $\dfrac{3\pi}{4}$ 回転した点を z_1 とし，線分 $\mathrm{O}z_1$ を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した端の点

(2) 点 z を原点のまわりに $\dfrac{3\pi}{2}$ 回転した点を z_2 とし，線分 $\mathrm{O}z_2$ を 3 倍に拡大した端の点

(3) 点 z を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転した点を z_3 とし，線分 $\mathrm{O}z_3$ を $\dfrac{1}{2}$ 倍に拡大した端の点

191 $(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^n = (e^{i(-\theta)})^n = e^{in(-\theta)}$
$$= e^{i(-n\theta)} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$
$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

192 (1) $8(1+i)$　　(2) $\dfrac{1}{16}$

193 (1) $z = \pm1$，$\pm i$，$\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$

(2) $z = 3i$，$\dfrac{3}{2}(\pm\sqrt{3}-i)$

194 (1) 1　　(2) $-ei$

(3) $\cos 1 - i\sin 1$

195 (1) $\overline{e^{\overline{z}}} = \overline{e^{x-iy}} = \overline{e^x(\cos y - i\sin y)}$
$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$= e^{x+iy} = e^z$$

(2) $|e^{i\,\mathrm{Re}(z)}| = |\cos\mathrm{Re}(z) + i\sin\mathrm{Re}(z)|$
$$= \sqrt{\cos^2\mathrm{Re}(z)+\sin^2\mathrm{Re}(z)} = 1$$

196 (1) $\cos(z+\pi) = \dfrac{e^{i(z+\pi)}+e^{-i(z+\pi)}}{2}$
$$= \frac{e^{iz}e^{i\pi}+e^{-iz}e^{-i\pi}}{2}$$
$$= \frac{-e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$
$$= -\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = -\cos z$$

$\sin(z+\pi) = \dfrac{e^{i(z+\pi)}-e^{-i(z+\pi)}}{2i}$
$$= \frac{e^{iz}e^{i\pi}-e^{-iz}e^{-i\pi}}{2i}$$
$$= \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$$
$$= -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

(2) $\sin z_1\ \cos z_2 - \cos z_1\ \sin z_2$
$$= \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$
$$= \frac{2e^{iz_1-iz_2}-2e^{-iz_1+iz_2}}{4i}$$
$$= \frac{e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}}{2i}$$
$$= \sin(z_1-z_2)$$

(3) $\cos z_1\ \cos z_2 + \sin z_1\ \sin z_2$
$$= \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$
$$= \frac{2e^{iz_1-iz_2}+2e^{-iz_1+iz_2}}{4}$$