4章 複素関数

1 正則関数

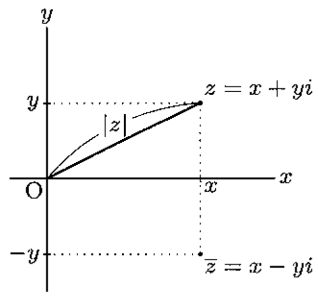
まとめ

● **複素数と極形式**

○ 複素数　$z = x + yi$（x, y は実数）

実部 $\mathrm{Re}(z) = x$, 虚部 $\mathrm{Im}(z) = y$, 絶対値 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

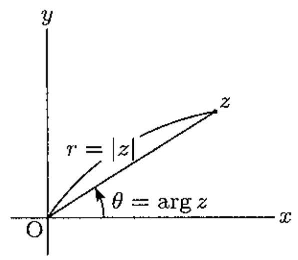
共役複素数　$\overline{z} = \overline{x + yi} = x - yi$



○ オイラーの公式　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

○ 極形式　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

絶対値 $|z| = |re^{i\theta}| = r$, 偏角 $\arg z = \arg re^{i\theta} = \theta$



○ $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$

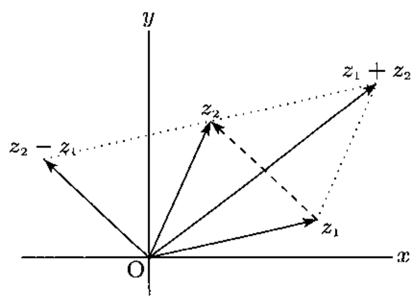
○ 複素数平面上の2点 z_1, z_2 の距離は　$|z_2 - z_1|$

○ $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

○ ド・モアブルの公式

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$　（n は任意の整数）



● **複素関数**　$w = f(z)$

○ 指数関数　$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$　（周期 $2\pi i$）

○ 三角関数　$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$　（周期 2π）

○ 1次分数関数　$f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$　$(ad - bc \neq 0)$

● **正則関数**

○ 関数 $f(z)$ は点 α で連続 $\iff$ $\displaystyle\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha)$

○ 導関数　$f'(z) = \displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

○ 領域 D で正則 $\iff$ D 内のすべての点で微分可能

● **コーシー・リーマンの関係式**

○ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則 $\iff$ $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

このとき　$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

○ 微分公式　$(e^z)' = e^z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$

○ $\varphi(x, y)$ が調和関数 $\iff$ $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$

正則関数の実部，虚部は調和関数である．

● **逆関数**　$w = g(z) \iff z = f(w)$

○ $z = re^{i\theta}$ のとき　$\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$　（2価関数）

○ 対数関数　$w = \log z \iff z = e^w$

$\log z = \log|z| + i\arg z$　$(z \neq 0)$　（無限多価関数）

○ $w = g(z)$ が1価関数で $f'(w) \neq 0$ のとき　$g'(z) = \dfrac{1}{f'(w)}$

○ $(\log z)' = \dfrac{1}{z}$　$(z \neq 0)$

Basic

184 次の複素数の実部，虚部，絶対値，共役複素数を求めよ． →教p.107 問・1

(1) $(3 + i)^2$　(2) $(1 - 3i)(2 - i)$

(3) $\dfrac{1}{2 - 3i}$　(4) $\dfrac{1 - 2i}{1 + 3i}$

185 次が成り立つことを証明せよ． →教p.107 問・2

(1) $\mathrm{Re}(z_1 - z_2) = \mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)$

(2) $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$

(3) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\{\mathrm{Re}(z)\}^2 + \{\mathrm{Im}(z)\}^2}$

(4) $\mathrm{Im}(z^2) = 2\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)$

(5) z が実数 $\iff$ $|z| = |\mathrm{Re}(z)|$

(6) z が純虚数 $\iff$ $|z| = |\mathrm{Im}(z)|$

186 次の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする． →教p.108 問・3

(1) $-1 - i$　(2) $\sqrt{3} - i$　(3) $-2i$　(4) -3

187 オイラーの公式を用いて，次の等式を証明せよ． →教p.108 問・4

(1) $|e^{-i\theta}| = 1$　(2) $\overline{e^{-i\theta}} = e^{i\theta}$

188 次の2点の距離を求めよ． →教p.109 問・5

(1) $3 + i$, $2 - 4i$　(2) 6, $-8i$

189 次の不等式が成り立つことを証明せよ． →教p.109 問・6

$$|z_1 - z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$$

190 0 でない複素数 z について，次の複素数はどんな点を表すか． →教p.110 問·7

(1) $(-1+i)z$　　(2) $-3iz$　　(3) $\dfrac{z}{\sqrt{3}-i}$

191 次の等式を証明せよ． →教p.111 問·8

$$\big(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\big)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta \qquad (n\text{ は正の整数})$$

192 次の計算をせよ． →教p.111 問·9

(1) $(1-i)^7$　　(2) $\dfrac{1}{(1-i)^8}$

193 次の方程式を解け． →教p.111 問·10

(1) $z^8=1$　　(2) $z^3=-27i$

194 次の値を求めよ． →教p.112 問·11

(1) $e^{2\pi i}$　　(2) $e^{1-\frac{\pi}{2}i}$　　(3) e^{-i}

195 指数関数 e^z について，次のことを証明せよ． →教p.112 問·12

(1) $\overline{e^{\overline{z}}}=e^z$　　(2) $|e^{i\,\mathrm{Re}(z)}|=1$

196 次の等式が成り立つことを証明せよ． →教p.113 問·13

(1) $\cos(z+\pi)=-\cos z,\ \sin(z+\pi)=-\sin z$

(2) $\sin(z_1-z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2$

(3) $\cos(z_1-z_2)=\cos z_1\cos z_2+\sin z_1\sin z_2$

197 $\cos z\sin z$ は周期 π の周期関数であることを証明せよ． →教p.113 問·14

198 関数 $w=z^3$ について，$z=re^{i\theta}$ に対応する w 平面上の点を求めよ． →教p.113 問·15

199 1 次分数関数 $w=\dfrac{1}{z+i}$ によって，z 平面上の次の図形は w 平面上のどんな図形に移るか． →教p.114 問·16

(1) 円 $|z|=\sqrt{2}$　　(2) 直線 $\mathrm{Re}(z)=2$

200 次の極限値を求めよ． →教p.115 問·17

(1) $\displaystyle\lim_{z\to1+i}\frac{z^2}{z-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{z\to2+i}(z+\overline{z})^2$

(3) $\displaystyle\lim_{z\to-i}\frac{z^2+1}{(z+i)(2z+i)}$

201 次の関数を微分せよ． →教p.117 問·18

(1) $w=(z^3-i)(z^2+iz-3)$　　(2) $w=\dfrac{iz}{z-i}$

(3) $w=(z^2-iz+2)^5$

202 次の関数について，$w=u+vi,\ z=x+yi$ とおくとき，$u,\ v$ は $x,\ y$ のどんな関数か． →教p.117 問·19

(1) $w=\dfrac{1}{z-1}$　　(2) $w=(z-i)^2$　　(3) $w=(z+2\overline{z})^2$

203 次の関数は正則か．もし正則ならば，導関数を求めよ． →教p.118 問·20

(1) $f(z)=(x+y)+(x-y)i$

(2) $f(z)=2y(3x^2-y^2)-2x(x^2-3y^2)i$

204 関数 $f(z)=z^2+iz-1$ に対して，正則な関数 $g(z)$ が $g'(z)=f'(z)$ および $g(i)=0$ を満たすとき，$g(z)$ を求めよ． →教p.118 問·21

205 $\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$ と定義するとき，$\cot z$ の導関数を求めよ． →教p.119 問·22

206 関数 $u=x^4-6x^2y^2+y^4$ は調和関数であることを証明せよ．また，正則関数 $f(z)=z^4$ の実部であることを証明せよ． →教p.119 問·23

207 次の値を求めよ． →教p.120 問·24

(1) $\sqrt{-i}$　　(2) $\sqrt{-1+i}$

(3) $\sqrt{4i}$　　(4) $\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}$

208 次の値を $x+yi$ の形で表せ． →教p.121 問·25

(1) $\log(\sqrt{3}-i)$　　(2) $\log 5i$

209 $w=\sqrt{z}$ は値域を適当に制限すると，1 価関数となる．このとき，次の公式を証明せよ． →教p.121 問·26

例えば，$0\leqq \arg w<\pi$ とすると，1 価関数となる．

$$(\sqrt{z})'=\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Check

210 次の複素数の実部，虚部，絶対値，共役複素数を求めよ．

(1) $(-1+3i)(3+2i)$　　(2) $(2i^7+i^5)(i^{10}-5i^3)$

(3) $\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{1-i}$　　(4) $\dfrac{3+i}{2-i}+\dfrac{2+i}{i(3-i)}$

211 次の複素数を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1) $1+\sqrt{3}i$　　(2) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}+i}$　　(3) $\dfrac{1}{8}(1+i)^6$

212 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $|z_1+z_2+z_3| \leqq |z_1|+|z_2|+|z_3|$

(2) $-|z_1+z_2| \leqq |z_1|-|z_2| \leqq |z_1+z_2|$

$|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$ を用いよ．

213 次の値を求めよ．

(1) $e^{1+\pi i}$　　(2) $\cos \pi i$　　(3) $\sin(\pi - i)$

214 関数 $w=2z+i$ によって，次の図形はどんな図形に移るか．

(1) 直線 $\mathrm{Im}(z)=1$　　(2) 円 $|z-1|=2$

215 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z+i}{z-i}$　　(2) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^2-iz}{z^2+1}$

216 次の関数を微分せよ．

(1) $w=(z^2-iz)(z+1)$　　(2) $w=\dfrac{i}{(z-i)^2}$

217 次の関数は正則か．もし正則ならば，導関数を求めよ．

(1) $f(z)=\overline{z}$

(2) $f(z)=(2xy+5y+3)+(-x^2+y^2-5x)i$

(3) $f(z)=e^{-y}(\cos x + i\sin x)$

218 次の関数は調和関数であることを証明せよ．

(1) $\varphi(x,\ y)=3x^2y-y^3$　　(2) $\varphi(x,\ y)=e^{-x}\sin y$

219 次の値を求めよ．

(1) $\sqrt{3i}$　　(2) $\log(-\sqrt{3}+i)$

Step up

例題 z の実部，虚部をそれぞれ x, y とおくとき，次の式を z と $\overline{z}$ で表せ．

$$2x+y+i(x-2y)$$

解 $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ より

$$\begin{aligned}2x+y+i(x-2y) &= 2\cdot\frac{z+\overline{z}}{2}+\frac{z-\overline{z}}{2i}+i\left(\frac{z+\overline{z}}{2}-2\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)\\ &= z+\overline{z}-\frac{z-\overline{z}}{2}i+\frac{z+\overline{z}}{2}i-z+\overline{z}\\ &= 2\overline{z}+\overline{z}i=(2+i)\overline{z}\end{aligned}$$ //

220 z の実部，虚部をそれぞれ x, y とおくとき，次の式を z と $\overline{z}$ で表せ．

(1) $-2y+1+2xi$　　(2) $x^2-y^2+x+(2xy-y)i$

例題 z 平面上の直線 $ax+by+c=0$ $\big(x=\mathrm{Re}(z),\ y=\mathrm{Im}(z)\big)$ は次のように表されることを証明せよ．ただし，α は複素数，k は実数の定数である．

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0$$

解 $x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$ より，直線の方程式は

$$\frac{a}{2}(z+\overline{z})+\frac{b}{2i}(z-\overline{z})+c=0$$

整理すると　$(a-bi)z+(a+bi)\overline{z}+2c=0$

ここで，$\alpha=a+bi$, $k=2c$ とすると，k は実数であり，直線の方程式は

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0$$

と表される． //

221 z 平面上の点 α を中心とする半径 r の円は次のように表されることを証明せよ．

$$z\overline{z}-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$$

例題 a, b, c を複素数，$a \neq 0$ とするとき，次の方程式を解け．

$$az^2+bz+c=0$$

解 方程式を変形すると　$a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=0$

これから

$$\left\{2a\left(z+\frac{b}{2a}\right)\right\}^2=b^2-4ac$$

$$2a\left(z+\frac{b}{2a}\right)=\sqrt{b^2-4ac}\quad(2\text{ 価関数})$$

したがって　$z=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ //

4章 複素関数

222 次の方程式を解け．

(1) $z^2 - 4iz + 1 = 0$　　(2) $z^2 - 2iz - (i+1) = 0$

例題 次の等式を証明せよ．ただし，x, y は実数である．

$$\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

解 双曲線関数の定義より　$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$

よって

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \\
&= \sin x \cdot \frac{e^{-y} + e^y}{2} + \cos x \cdot \frac{e^{-y} - e^y}{2i} \\
&= \sin x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i \cos x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

//

223 次の等式を証明せよ．ただし，x, y は実数である．

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

例題 関数 $w = z + \dfrac{1}{z}$ による円 $|z| = r$ の像は，$u = \mathrm{Re}(w)$, $v = \mathrm{Im}(w)$ とおくとき，次のようになることを証明せよ．

$r = 1$ のとき　　線分 $v = 0$, $-2 \leqq u \leqq 2$

$r \fallingdotseq 1$ のとき　　楕円 $\dfrac{u^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2} = 1$

解 円 $|z| = r$ 上の点は $z = re^{i\theta}$ と表されるから

$$\begin{aligned}
w &= re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\
&= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta
\end{aligned}$$

これから

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta,\quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

$r = 1$ のとき　$u = 2\cos\theta$, $v = 0$

よって，線分 $v = 0$, $-2 \leqq u \leqq 2$ に移る．

また，$r \fallingdotseq 1$ のとき

$$\cos\theta = \frac{u}{r + \frac{1}{r}},\quad \sin\theta = \frac{v}{r - \frac{1}{r}}$$

したがって，楕円 $\dfrac{u^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2} = 1$ に移る．　//

224 関数 $w = z + \dfrac{1}{z}$ による半直線 $z = te^{i\alpha}$ $(t > 0)$ の像は次のようになることを証明せよ．ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

$\alpha = 0$ のとき　　半直線 $v = 0$, $u \geqq 2$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき　双曲線 $\dfrac{u^2}{(2\cos\alpha)^2} - \dfrac{v^2}{(2\sin\alpha)^2} = 1$ の右半分

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　　直線 $u = 0$

225 関数 $w = \sin z$ による直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$ および線分 $y = 1$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の像を求めよ．

例題 関数 $u(x,\ y) = x^2 - y^2 - y$ は調和関数であることを示し，$u(x,\ y)$ を実部とする正則関数を求めよ．

解 $u_{xx} = 2$, $u_{yy} = -2$ だから

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

よって，$u(x,\ y)$ は調和関数である．

$u(x,\ y)$ を実部とする正則関数を

$$f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$$

とおくと，コーシー・リーマンの関係式より

$$v_y = u_x = 2x,\quad v_x = -u_y = 2y + 1$$

第1式を y について積分すると

$v = 2xy + \varphi(x)$　(ただし，$\varphi(x)$ は x だけの関数)　①

第2式に代入すると　$2y + \varphi'(x) = 2y + 1$

これから　$\varphi'(x) = 1$

$\therefore$　$\varphi(x) = x + c$　(ただし，c は実数の任意定数)

①に代入すると，$v = 2xy + x + c$ となるから

$$\begin{aligned}
f(z) &= x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) \\
&= x^2 + 2xyi - y^2 - y + xi + ci \\
&= (x + yi)^2 + i(x + yi) + ci \\
&= z^2 + iz + ci
\end{aligned}$$

(ただし，c は実数の任意定数)　//

226 次の関数 $u(x,\ y)$ は調和関数であることを示し，$u(x,\ y)$ を実部とする正則関数を求めよ．

(1) $u(x,\ y) = x^2 - y^2$　　(2) $u(x,\ y) = e^x \cos y$

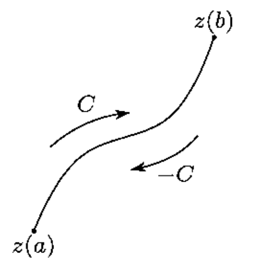
2 積分

まとめ

● **複素積分**　積分路 C は区分的に滑らかで，$f(z)$ は C 上で連続とする．

○ 点 α を中心とする半径 r の円の方程式　$z=\alpha+re^{it}\quad(0\leqq t\leqq 2\pi)$

点 z_1 から点 z_2 に至る線分の方程式　$z=(1-t)z_1+tz_2\quad(0\leqq t\leqq 1)$



○ $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=\lim_{\Delta z_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(z_k)\Delta z_k$

$$=\int_a^b f\bigl(z(t)\bigr)\frac{dz}{dt}\,dt\quad(C\text{ が滑らかなとき})$$

○ 円 $C:z=\alpha+re^{it}\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ について

$$\int_C\frac{1}{z-\alpha}\,dz=2\pi i,\quad \int_C\frac{1}{(z-\alpha)^n}\,dz=0\quad(n\text{ は 2 以上の整数})$$

○ 複素積分の性質

$$\int_{-C}f(z)\,dz=-\int_C f(z)\,dz$$

$$\int_{C_1+C_2}f(z)\,dz=\int_{C_1}f(z)\,dz+\int_{C_2}f(z)\,dz$$

$$\int_C kf(z)\,dz=k\int_C f(z)\,dz\quad(k\text{ は定数})$$

$$\int_C(f(z)+g(z))\,dz=\int_C f(z)\,dz+\int_C g(z)\,dz$$

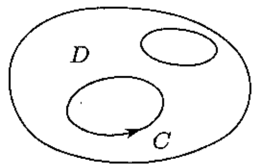
○ 積分の絶対値の評価　$\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right|\leqq\int_a^b\bigl|f\bigl(z(t)\bigr)\bigr|\left|\frac{dz}{dt}\right|dt$

○ $F(z)$ が $f(z)$ の不定積分 $\Longleftrightarrow F'(z)=f(z)$

このとき　$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=F(\beta)-F(\alpha)$　(C は α から β に至る曲線)

● **コーシーの積分定理**

$f(z)$ は領域 D で正則とし，C，C_1，C_2 は D 内の単純閉曲線とする．



○ C の内部が D に含まれるとき　$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$

○ C_2 は C_1 の内部にあり，C_1 と C_2 の間にある部分が D に含まれるとき

$$\int_{C_1}f(z)\,dz=\int_{C_2}f(z)\,dz$$

○ C 上にない点 α について

$$\int_C\frac{1}{z-\alpha}\,dz=\begin{cases}0 & (\text{点 }\alpha\text{ が }C\text{ の外部にあるとき})\\ 2\pi i & (\text{点 }\alpha\text{ が }C\text{ の内部にあるとき})\end{cases}$$

○ 単連結な領域 D で正則な関数は D で不定積分をもつ．

● **コーシーの積分表示**

$f(z)$ は領域 D で正則，C は D 内の単純閉曲線で，C の内部は D に含まれるとき，C の内部の点 α について

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$$

$$f^{(n)}(\alpha)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

● **べき級数**

α を中心とするべき級数

$$a_0+a_1(z-\alpha)+a_2(z-\alpha)^2+\cdots+a_n(z-\alpha)^n+\cdots\qquad(*)$$

収束半径 R：$|z-\alpha|<R$ のとき収束，$|z-\alpha|>R$ のとき発散

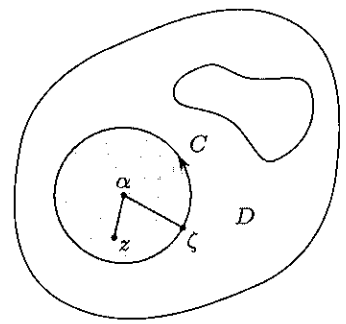
$|z-\alpha|<R$ のとき，べき級数 $(*)$ は正則で，その導関数は

$$a_1+2a_2(z-\alpha)+\cdots+na_n(z-\alpha)^{n-1}+\cdots$$

● **関数の展開**

○ $f(z)$ は領域 D で正則とし，D 内の 1 点を α とする．α を中心とする半径 R の円 C が D に含まれるならば，$|z-\alpha|<R$ のとき，$f(z)$ は α を中心とするテイラー展開で表される．

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n\quad\left(a_n=\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\right)$$



○ $f(z)$ の α を中心とするローラン展開

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$$

● **孤立特異点と留数**

○ $f(z)$ の孤立特異点 α

α を中心とする十分小さな円の周および内部で，$f(z)$ は α を除き正則

○ 留数　$\displaystyle\mathrm{Res}[f,\ \alpha]=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$

○ 点 α が 1 位の極のとき　$\displaystyle\mathrm{Res}[f,\ \alpha]=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$

点 α が k 位の極 $(k\geqq 2)$ のとき

$$\mathrm{Res}[f,\ \alpha]=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-\alpha)^k f(z)\}$$

● **留数定理**

単純閉曲線 C の内部にある特異点 α_1，α_2，$\cdots$，α_n を除き，C の周および内部で $f(z)$ が正則ならば

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\bigl(\mathrm{Res}[f,\ \alpha_1]+\mathrm{Res}[f,\ \alpha_2]+\cdots+\mathrm{Res}[f,\ \alpha_n]\bigr)$$

Basic

227 次の曲線の方程式を求めよ． →教 p.124 問·1

(1) 点 i を中心とする半径 2 の円　　(2) 点 3 から点 $-i$ に至る線分

228 次の複素積分の値を求めよ． →教 p.126 問·2

(1) $\displaystyle\int_C z\,dz$　　$C: z = 2t + it^2 \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

(2) $\displaystyle\int_C z^5\,dz$　　$C: z = t + it \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

229 $C: z = 3 + re^{it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のとき，次の複素積分の値を求めよ． →教 p.126 問·3

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-3}\,dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-3)^2}\,dz$

230 次の複素積分の値を求めよ． →教 p.127 問·4

(1) $\displaystyle\int_C z\,dz$　　C：1 から $1+i$ に至る線分

(2) $\displaystyle\int_C (z-2)^4\,dz$　　C：2 を中心とする半径 1 の円の 3 から 1 に至る上半円

(3) $\displaystyle\int_C \mathrm{Im}(z)\,dz$　　C：0 から $1+i$，$1+i$ から i，i から 0 に至る三角形の周

231 次の積分の値を求めよ． →教 p.129 問·5

(1) $\displaystyle\int_C z^3\,dz$　　C：0 から $1+i$ に至る任意の曲線

(2) $\displaystyle\int_C \cos z\,dz$　　C：π から $-i$ に至る任意の曲線

232 関数 $\dfrac{1}{z-2i}$ の次の曲線に沿う積分の値を求めよ． →教 p.133 問·6

(1) 原点を中心とする単位円

(2) 3 点 -1，1，$3i$ でつくられる三角形の周

233 次の問いに答えよ． →教 p.133 問·7

(1) $\dfrac{3z+2i}{z^2+4} = \dfrac{a}{z-2i} + \dfrac{b}{z+2i}$ を満たす定数 a，b を求めよ．

(2) 原点を中心とする半径 3 の円を C とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{3z+2i}{z^2+4}\,dz$ の値を求めよ．

234 点 i を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C_1，点 $-i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C_2，原点を中心とする半径 2 の円を C とするとき，次の積分の値を求めよ． →教 p.133 問·8

(1) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z-i}\,dz$　　(2) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z-i}\,dz$　　(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-i}\,dz$

235 原点を中心とする半径 4 の円を C とするとき，次の積分の値を求めよ． →教 p.136 問·9

(1) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z-\pi}\,dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z+2i}\,dz$

236 関数 $f(z) = \dfrac{1}{3-z}$ の 1 を中心とするテイラー展開を求めよ． →教 p.139 問·10

237 次の関数の (　) 内の点を中心とするローラン展開を求めよ． →教 p.140 問·11

(1) $\dfrac{1}{(z+2)(z+3)} \quad (z=-3)$　　(2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2} \quad (z=2)$

238 次の関数の孤立特異点における留数を求めよ． →教 p.144 問·12

(1) $f(z) = \dfrac{2z+3}{(z-2)(z+2)}$　　(2) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^4}$

(3) $f(z) = \dfrac{ze^{-z}}{(z-2i)^2}$　　(4) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2(z-4)}$

239 次の積分の値を求めよ．ただし，C はその右に示す円とする． →教 p.145 問·13

(1) $\displaystyle\int_C \frac{3z-4}{z^2-4z}\,dz$　　$C: |z-3| = 2$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z+3}{z^2+1}\,dz$　　$C: |z| = 2$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+1)}\,dz$　　$C: |z+1| = 3$

240 原点を中心とする半径 1 の円を C とするとき，次の積分の値を求めよ． →教 p.146 問·14

(1) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-\sqrt{2})(1-\sqrt{2}z)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\sqrt{2}\cos t}$

Check

241 1 から $-i$ に至る線分を C_1，原点を中心とする単位円の下半分に沿って 1 から $-i$ に至る曲線を C_2 とおくとき，次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1} z^2\,dz$　　(2) $\displaystyle\int_{C_2} z^2\,dz$　　(3) $\displaystyle\int_{C_1} \overline{z}\,dz$　　(4) $\displaystyle\int_{C_2} \overline{z}\,dz$

242 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C (z^2 - iz + 2)\,dz$　　C：0 から $3+i$ に至る曲線

(2) $\displaystyle\int_C ze^z dz$　　C：π から $2\pi i$ に至る曲線

243 コーシーの積分表示の公式を用いて次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z+2}dz$　　C：$|z+2|=1$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$　　C：$|z|=2$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z^3+1}{z^2+1}dz$　　C：点 -1，1，$-2i$ を頂点とする三角形の周

(4) $\displaystyle\int_C \frac{-\sin z}{(z-\pi)^2}dz$　　C：点 $-i$，$4-i$，$4+i$，i を頂点とする長方形の周

244 次の関数の孤立特異点を中心とするローラン展開を求めよ．

(1) $\dfrac{\sin z}{z-\pi}$　　(2) $\dfrac{1}{z^2+7z+12}$

245 次の関数の孤立特異点における留数を求めよ．

(1) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z-1)}$　　(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^4(z+1)}$

(3) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^2+9}$　　(4) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z-i)^2}$

246 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{2z+3}{z(z-4)}\,dz$　　C：$|z-3|=2$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^{3z}}{z^2+1}\,dz$　　C：$|z|=3$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z-1)^2(z+1)}\,dz$　　C：$|z-1|=1$

247 原点を中心とする半径 1 の円を C とするとき，次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-\sqrt{3})(1-\sqrt{3}z)}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4-2\sqrt{3}\cos t}$

Step up

例題 次の関数の（　）内の点を中心とするテイラー展開を求めよ．また，その収束半径を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1-2z}$　$(z=0)$　　(2) $\dfrac{1}{(1-2z)^2}$　$(z=0)$

解 等比級数 $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}+\cdots=\dfrac{1}{1-z}$　$(|z|<1)$　を用いる．

(1) $\dfrac{1}{1-2z}=1+(2z)+(2z)^2+\cdots+(2z)^{n-1}+\cdots$　$(|2z|<1)$

$=1+2z+4z^2+\cdots+2^{n-1}z^{n-1}+\cdots$

$|z|<\dfrac{1}{2}$ より，収束半径は　$\dfrac{1}{2}$

(2) (1) の結果を項別に微分すると

$$\frac{2}{(1-2z)^2}=2+8z+24z^2+\cdots+n\cdot 2^n z^{n-1}+\cdots$$

これより

$$\frac{1}{(1-2z)^2}=1+4z+12z^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}z^{n-1}+\cdots$$

収束半径は，微分する前の級数と一致するから　$\dfrac{1}{2}$　//

248 次の関数の（　）内の点を中心とするテイラー展開を求めよ．また，その収束半径を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1-z^3}$　$(z=0)$　　(2) $\dfrac{1}{1-3z}$　$(z=0)$

(3) $\dfrac{1}{(1-3z)^2}$　$(z=0)$　　(4) $\dfrac{1}{1-z}$　$(z=i)$

例題 積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4-1}\,dz$ の値を次の曲線 C について求めよ．

(1) 円 $|z|=2$

(2) $-\dfrac{1}{2}-2i$，$-\dfrac{1}{2}+2i$，2 を頂点とする三角形の周

解 $z^4-1=(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$ より

$f(z)=\dfrac{1}{z^4-1}$ の孤立特異点は点 ± 1，$\pm i$ で，それぞれの点における留数は

$\mathrm{Res}[f,\ 1]=\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{Res}[f,\ -1]=-\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{Res}[f,\ i]=\dfrac{1}{4}i$, $\mathrm{Res}[f,\ -i]=-\dfrac{1}{4}i$

(1) ± 1，$\pm i$ は円 C の内部にあるから

$$\int_C \frac{1}{z^4-1}\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}i\right)=0$$

(2) 1，$\pm i$ は三角形 C の内部にあるから

$$\int_C \frac{1}{z^4-1}\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}i\right)=\frac{\pi}{2}i$$　//

249 積分 $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^4-16}\,dz$ の値を次の曲線 C について求めよ．

(1) 円 $|z-1|=2$

(2) $1+3i,\ -1+3i,\ -1-3i,\ 1-3i$ を頂点とする四角形の周

250 1 から $2i$ に至る線分を C_1，$2i$ から -1 に至る線分を C_2，-1 から 1 に至る線分を C_3 とするとき，次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1+C_2+C_3} \frac{dz}{z^2+3}$　　(2) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \frac{dz}{z^2+3}$

251 曲線 C を円 $|z-1|=\dfrac{1}{2}$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sqrt{z}}{z-1}\,dz$ の値を求めよ．ただし，$\sqrt{z}$ は $\dfrac{\pi}{2}<\arg\sqrt{z}\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ と制限した 1 価関数とする．

例題 関数 $f(z)$ が円 $|z-\alpha|=r$ の周および内部を含む領域で正則であるとき，

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha+re^{it})\,dt$$

が成り立つことを証明せよ．

解 コーシーの積分表示を $C: z=\alpha+re^{it}\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ で表すと

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha+re^{it})}{re^{it}}ire^{it}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha+re^{it})\,dt \qquad //$$

252 関数 $f(z)$，$g(z)$ は領域 D で正則とし，D 内の単純閉曲線 C の内部は D に含まれるとする．このとき，C 上で $f(z)=g(z)$ であれば，C の内部にある任意の点 α について，$f(\alpha)=g(\alpha)$ であることを証明せよ．

例題 $g(z)$，$h(z)$ が正則で，$f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ の孤立特異点 α が 1 位の極であるとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathrm{Res}[f,\ \alpha]=\frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$$

解 α は $f(z)$ の 1 位の極だから　$h(\alpha)=0$

$$\mathrm{Res}[f,\ \alpha]=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{g(z)}{h(z)}$$
$$=\lim_{z\to\alpha}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(\alpha)}{z-\alpha}}=\frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)} \qquad //$$

253 次の関数の孤立特異点における留数を求めよ．

(1) $\dfrac{e^{-z}}{z^2+1}$　　(2) $\dfrac{z}{z^3+1}$

例題 積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$ の値を求めよ．

解 $z=e^{i\theta}$ とおく．$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，z は単位円 C を 1 周する．

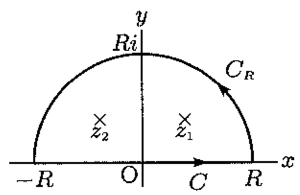
$$dz=ie^{i\theta}d\theta \text{ より }\quad d\theta=\frac{dz}{iz}$$
$$5+4\cos\theta=5+4\times\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
$$=\frac{2z^2+5z+2}{z}=\frac{(2z+1)(z+2)}{z}$$
$$I=\int_C\frac{z}{(2z+1)(z+2)}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int_C\frac{dz}{(2z+1)(z+2)}$$
$$=\frac{1}{i}\times 2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(2z+1)(z+2)},\ -\frac{1}{2}\right]$$
$$=2\pi\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(2z+1)(z+2)}=2\pi\times\frac{1}{3}=\frac{2\pi}{3} \qquad //$$

254 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5+4\sin\theta)^2}$

例題 積分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ の値を求めよ．

解 図のように半円 C_R と線分 C をとり



$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ とおく．（ただし，$R>1$）

C_R+C の内部にある $f(z)$ の孤立特異点は

$$z_1=e^{\frac{\pi}{4}i},\ z_2=e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

であり，z_1，z_2 における留数はそれぞれ $\dfrac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$，$\dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$$\therefore\ \int_{C+C_R}\frac{dz}{z^4+1}=2\pi i\left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

一方，この左辺の積分は

$$\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}+\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+1}$$

であり，第 1 項について

$$\left|\int_{C_R}\frac{dz}{z^4+1}\right|\leqq\frac{\pi R}{R^4-1}=\frac{\pi}{R^3-R^{-1}}\to 0\quad(R\to\infty)$$

したがって　$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ $\qquad //$

255 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx$

(1), (2) それぞれ $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{(z^2+4)^2}$　$f(z)=\dfrac{2e^{iz}}{z^4+5z^2+4}$ についての積分を考えよ．

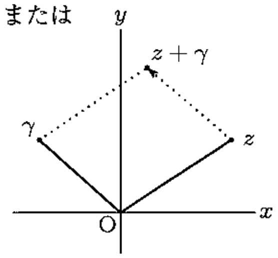
4 章 複素関数

Plus

1── 1次分数関数

1次分数関数 $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$ は円または直線を円または直線に移すことが次のように証明される.

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\dfrac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}}+\frac{a}{c}$$



より

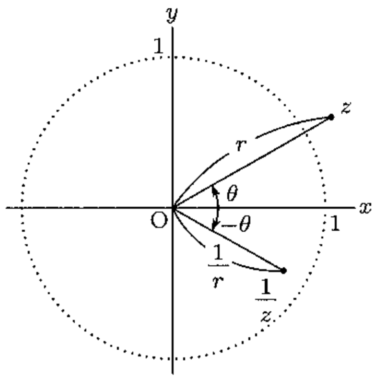
$$f_1(z)=z+\gamma_1\ \left(\gamma_1=\frac{d}{c}\right)\qquad f_2(z)=\frac{1}{z}$$

$$f_3(z)=\delta z\ \left(\delta=\frac{bc-ad}{c^2}\right)\qquad f_4(z)=z+\gamma_2\ \left(\gamma_2=\frac{a}{c}\right)$$

とすると, $f(z)$ は1次分数関数

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ f_4(z)$$

を合成して得られる.

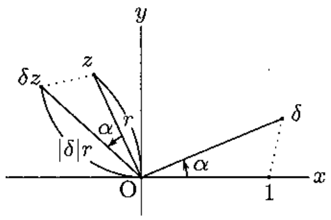


1次分数関数 $w=z+\gamma_k$ は平行移動, $w=\delta z$ は回転拡大（縮小）を表すから, 円または直線を円または直線に移す.

1次分数関数 $w=\dfrac{1}{z}$ については, $z=\dfrac{1}{w}$ として, 円の方程式

$$z\overline{z}-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+\beta=0\quad(\beta\text{ は実数, }\alpha\overline{\alpha}-\beta>0)$$

に代入すると



$$\frac{1}{w\overline{w}}-\left(\overline{\alpha}\frac{1}{w}+\alpha\frac{1}{\overline{w}}\right)+\beta=0$$

$$1-(\overline{\alpha}\,\overline{w}+\alpha w)+\beta w\overline{w}=0$$

したがって, $\beta=0$ のとき

$$1-(\overline{\alpha}\,\overline{w}+\alpha w)=0$$

より直線を表し, $\beta\neq 0$ のとき

$$w\overline{w}-\left(\frac{\alpha}{\beta}w+\frac{\overline{\alpha}}{\beta}\overline{w}\right)+\frac{1}{\beta}=0,\quad \frac{\alpha}{\beta}\frac{\overline{\alpha}}{\beta}-\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\overline{\alpha}-\beta}{\beta^2}>0$$

より円を表す.

同様に, 直線の方程式

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+k=0$$

に代入すると, 円または直線の方程式が得られる.

よって, 任意の1次分数関数はこれら3つの形の1次分数関数の合成となるから, 円または直線を円または直線に移す.

256 $f(z)=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}z-1}{2z+2\sqrt{3}}$ により, 円 $|z-i|=2$ はどんな図形に移るか.

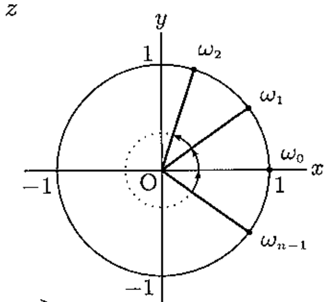
（大阪大）

2── n 価関数

3以上の整数 n について, $w=z^n$ の逆関数を $\boldsymbol{w=\sqrt[n]{z}}$ で表す.

$z\neq 0$ のとき, $r=|z|$, $\theta=\arg z$ とすると　$w^n=z$, $\left(\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n=z$

したがって　$\left(\dfrac{w}{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n=1$



n 乗して1になるから, 1の n 乗根 $\omega_k=e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ を用いて書き表すと

$$\frac{w}{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}}=\omega_k\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

よって　$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}\omega_k\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

$w=\sqrt[n]{z}$ は, $z\neq 0$ のとき上に示す n 個の値をとるから, **n 価関数**という.

また, 2価以上の関数をまとめて**多価関数**という.

257 $w=\sqrt[4]{z}$ の値域を適当に制限して1価関数とするとき, 次の公式を証明せよ.

$$(\sqrt[4]{z})'=\frac{1}{4(\sqrt[4]{z})^3}$$

3── 対数関数の主値

z を複素数とするとき

$$\log z=\log|z|+i\arg z\qquad(z\neq 0)$$

$\arg z$ の値は 2π の整数倍の差だけの任意性があるから, $\log z$ は $z\neq 0$ のとき無限多価関数である. $\log z$ の値の範囲を $-\pi<\arg z\leqq\pi$ に制限すると, 一意的に定まる. これを $\mathrm{Log}\,z$ と書き, $\log z$ の**主値**という.

特に, z が正の実数の場合は, $\mathrm{Log}\,z$ は実数のときの自然対数 $\log z$ に一致する.

例 1　$z=2i$ のとき, $|z|=2$, $\arg z=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ だから

$$\log 2i=\log 2+\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)i\quad(n\text{ は整数})$$

$$\mathrm{Log}\,2i=\log 2+\frac{\pi}{2}i$$

右辺の $\log 2$ は実数のときの自然対数を表す.

例題　方程式 $\sin z=i$ を解け.

解　$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ より, 方程式は　$e^{iz}-e^{-iz}=-2$

$e^{iz}=w$ とすると $w^2+2w-1=0$ より　$w=-1\pm\sqrt{2}$

すなわち　$iz=\log(-1\pm\sqrt{2})=\mathrm{Log}(-1\pm\sqrt{2})+2n\pi i\quad(n\text{ は整数})$

$$\mathrm{Log}(-1+\sqrt{2})=\log(-1+\sqrt{2})$$

$$\mathrm{Log}(-1-\sqrt{2})=\log(1+\sqrt{2})+\pi i$$

$\log(-1+\sqrt{2})$, $\log(1+\sqrt{2})$ は実数のときの自然対数を表す.

よって　$z=2n\pi-i\log(-1+\sqrt{2}),$

$(2n+1)\pi-i\log(1+\sqrt{2})\quad(n\text{ は整数})$　//

258 次の方程式を解け.

(1) $\sin z = 3i$ （筑波大） (2) $\sin z = 2$ （北海道大）

4 — 一般のべき関数

実数 $x(>0)$, y, α について，$y = x^{\alpha}$ であるとき，両辺の対数をとると

$$\log y = \alpha \log x$$

したがって，次の等式が成り立つ.

$$y = x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}$$

この関係が複素数 z, α に対しても成り立つように

$$\boldsymbol{z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}}$$

と定義して，これを z の**べき関数**という.

$\log z$ は無限多価関数だから，z^{α} も一般には無限多価関数である.

例題 0 でない複素数 z について $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$ が成り立つことを証明せよ.

解 $z = re^{i\theta}$ とおくと $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ （n は整数）

したがって $z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}\log r} e^{i\frac{\theta}{2}} e^{in\pi} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

これは $\sqrt{z}$ の定義と一致する. すなわち $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$ //

259 0 でない複素数 z について $z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{z}$ が成り立つことを証明せよ.

例題 i^i を極形式で表せ.

解 $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ より $\log i = \log|i| + i\arg i = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ （n は整数）

したがって $i^i = e^{i\log i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2n\pi}$ //

260 次の値を極形式で表せ.

(1) $(-2)^i$ (2) i^{1+i} (3) $(1+i)^i$

5 — 正則関数による写像の等角性

複素関数 $w = f(z)$ は，z 平面上の点 z に w 平面上の点 w を対応させる. 点 z に点 w を対応させるこの操作を $w = f(z)$ による**写像**といい，点 w を点 z の**像**という. また，z 平面上の図形 F に対して，その各点の像全体が作る w 平面上の図形を F の像という.

指数関数 $w = e^z$ の実部を u，虚部を v とし，$z = x + yi$ とおくと

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$$

x 軸すなわち z 平面上の実軸は $y = 0$ で表されるから $u = e^x$, $v = 0$

したがって，x 軸の像は u 軸の正の部分である.

同様に，x 軸に平行な直線 $y = \alpha$ （α は定数）の像は，半直線

$$u = r\cos\alpha,\ v = r\sin\alpha \quad (r = e^x > 0)$$

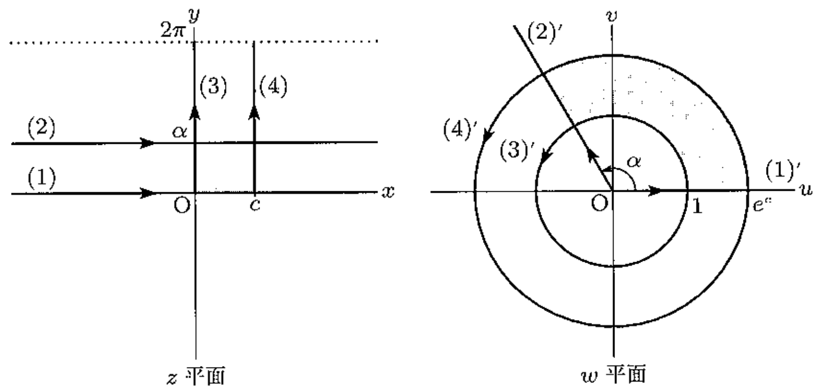
であることがわかる.

次に，y 軸上の線分 $x = 0$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$ の像は $u = \cos y$, $v = \sin y$

これから $u^2 + v^2 = 1$

すなわち，原点を中心とする単位円である.

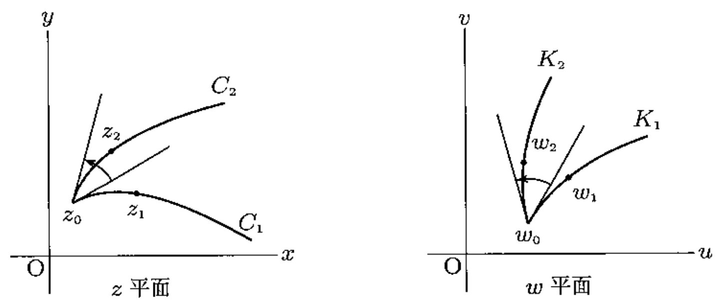
また，線分 $x = c$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$ （c は定数）の像は，円 $u^2 + v^2 = (e^c)^2$ であり，これらの対応を図示すると次のようになる.



図から，直線 (1), (2) と線分 (3), (4) は互いに直交しており，それらの像も交点の像において互いに直交していることがわかる.

一般に，関数 $w = f(z)$ が領域 D で正則であるとき，$f'(z_0) \neq 0$ である D 内の点 z_0 で交わる 2 つの曲線のなす角は，これらに対応する w 平面上の 2 つの曲線のなす角に向きを含めて等しい. これを正則関数による写像の**等角性**といい，次のように証明される.

D 内の 1 点 z_0 を通る D 内の曲線 C_1, C_2 をとり，関数 $f(z)$ によるこれらの像をそれぞれ K_1, K_2 とすれば，K_1, K_2 は点 z_0 の像 w_0 を通る.



曲線 C_1, C_2 上にそれぞれ点 z_0 に近い点 z_1, z_2 をとり，それらの像をそれぞれ w_1, w_2 とすると

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{z_1\to z_0}\frac{w_1-w_0}{z_1-z_0}=\lim_{z_2\to z_0}\frac{w_2-w_0}{z_2-z_0}$$

となるから，次の近似式が成り立つ．

$$w_1-w_0\fallingdotseq f'(z_0)(z_1-z_0)\ ,\quad w_2-w_0\fallingdotseq f'(z_0)(z_2-z_0)$$

したがって，$f'(z_0)\neq 0$ とすると

$$\arg(w_1-w_0)\fallingdotseq\arg f'(z_0)+\arg(z_1-z_0)$$
$$\arg(w_2-w_0)\fallingdotseq\arg f'(z_0)+\arg(z_2-z_0)$$

これから

$$\arg(w_2-w_0)-\arg(w_1-w_0)\fallingdotseq\arg(z_2-z_0)-\arg(z_1-z_0)\qquad(1)$$

複素数 w_2-w_0 はベクトル $\overrightarrow{w_0w_2}$ に対応し，他も同様だから，(1) より

$$\angle w_1w_0w_2\fallingdotseq\angle z_1z_0z_2\qquad(2)$$

$z_1\to z_0$, $z_2\to z_0$ のとき，(2) の右辺は，2 曲線 C_1, C_2 の z_0 における接線のなす角に，(2) の左辺は，w_0 における 2 曲線 K_1, K_2 のなす角に限りなく近づく．

261 関数 $w=iz^2$ による 2 直線 $x=1$, $y=1$ の像の方程式を求めよ．また，等角性に注意して，それらのグラフをかけ．

6 — 補章関連

コーシーの積分定理

→教 p.166

関数 $f(z)$ は領域 D で正則で，D 内の単純閉曲線 C で囲まれた部分が D に含まれるとする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

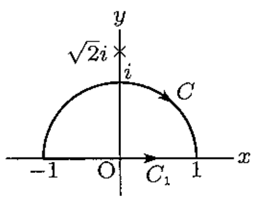
コーシーの積分定理を用いた積分を例題として示す．

例題 原点を中心とする単位円の上半分に沿って点 -1 から点 1 に至る曲線を C とする．このとき，次の積分の値を求めよ．

$$\int_C\frac{1}{z^2+2}\,dz$$

解 $z^2+2=(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}i)$

よって，$\dfrac{1}{z^2+2}$ は，2 点 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$ を除いた全平面で正則である．



-1 から 1 に至る実軸上の線分を C_1 とすると，コーシーの積分定理より，閉曲線 $C_1+(-C)$ に沿った積分の値は 0 である．すなわち

$$\int_{C_1+(-C)}\frac{1}{z^2+2}\,dz=\int_{C_1}\frac{1}{z^2+2}\,dz-\int_C\frac{1}{z^2+2}\,dz=0$$

$$\therefore\quad\int_C\frac{1}{z^2+2}\,dz=\int_{C_1}\frac{1}{z^2+2}\,dz=\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+2}\,dt$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{t^2+2}\,dt=2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^1=\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad//$$

262 関数 $\dfrac{1}{z^2+4}$ について，次の曲線に沿った積分の値を求めよ．

(1) 原点を中心とする単位円の下半分に沿って -1 から 1 に至る曲線

(2) 原点を中心とする単位円の右半分に沿って $-i$ から i に至る曲線

実積分の計算

→教 p.168

次の等式が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+ai)^2}\,dx=\sqrt{\pi}\qquad(a\text{ は実数の定数})$$

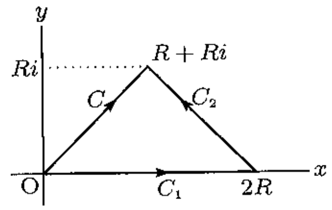
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

263 $R>0$ について，線分

$C:z=t+it\qquad(0\leqq t\leqq R)$

$C_1:z=t\qquad(0\leqq t\leqq 2R)$

$C_2:z=(2R-t)+it\quad(0\leqq t\leqq R)$



とおくとき，次のことを証明せよ．

(1) $R\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_{C_2}e^{-z^2}\,dz\to 0$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-2t^2i}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-i)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(2t^2)\,dt=\int_0^{\infty}\sin(2t^2)\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

264 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos(t^2)\,dt$ の値を求めよ．

265 $f(z)=\dfrac{1-e^{iz}}{z^2}$ とし，図のように半円 C_R, C_r および線分 C_1, C_2 をとるとき，次のことを証明せよ．

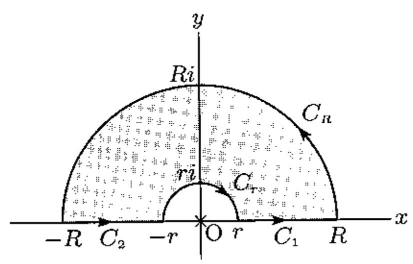
教科書 p.169(4) を用いよ．
$$\lim_{r\to 0}\int_{-C_r}f(z)\,dz=\pi i\,\mathrm{Res}[f,\ 0]$$

(1) 0 は $f(z)$ の 1 位の極である．

(2) C_R 上で $|f(z)|\leqq\dfrac{2}{R^2}$

(3) $\displaystyle\int_{C_1}f(z)\,dz+\int_{C_2}f(z)\,dz$

$\displaystyle\qquad=2\int_r^R\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$



(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$

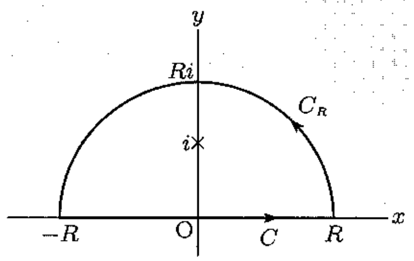
例題 図のように半円 C_R と線分 C をとり，$f(z)=\dfrac{e^{2iz}}{z^2+1}$ とおく．このとき，次のことを証明せよ．ただし，$R>1$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{C_R+C} f(z)\,dz=\frac{\pi}{e^2}$

(2) C_R 上で $|f(z)|\leqq\dfrac{1}{R^2-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{e^2}$



解 C_R は $z=Re^{it}$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と表せる．

(1) 留数定理より

$$\int_{C_R+C} f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f,\ i]=2\pi i\times\frac{e^{-2}}{2i}=\frac{\pi}{e^2}$$

(2) C_R 上で $z=R(\cos t+i\sin t)$ より

$$|e^{2iz}|=|e^{-2R\sin t+i2R\cos t}|=e^{-2R\sin t}$$

$$\therefore\ |f(z)|=\frac{|e^{2iz}|}{|z^2+1|}\leqq\frac{e^{-2R\sin t}}{|z|^2-1}\leqq\frac{1}{R^2-1}$$

(3) (2) と C_R 上で $\dfrac{dz}{dt}=iRe^{it}$ より

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|\leqq\int_0^{\pi}|f(z)|\left|\frac{dz}{dt}\right|dt\leqq\int_0^{\pi}\frac{R}{R^2-1}dt$$

$$=\frac{\pi R}{R^2-1}=\frac{\pi}{R-R^{-1}}\to 0\quad(R\to\infty)$$

$$\therefore\ \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$$

(4) (1) より

$$\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{-R}^{R}\frac{e^{2xi}}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{e^2}$$

$R\to\infty$ とすると，(3) より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x+i\sin 2x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{e^2}$$

両辺の実部を比較して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{e^2}\qquad //$$

266 例題の図のように半円 C_R と線分 C をとり，$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ とおく．このとき，次の等式を証明せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{e}$$

7――いろいろな問題

267 複素数平面上で次の 3 点が正三角形を作るとき，点 w を求めよ．

(1) $0,\ 1+i,\ w$　　(2) $0,\ -\sqrt{3}+i,\ w$

268 複素数平面上で，次の式が表す z 平面上の図形は何か．

(1) $\mathrm{Re}\{(2+i)z\}=1$　　(2) $|5z-i|=|3z-7i|$　（大阪大）

269 1 次分数関数 $w=\dfrac{z-1}{z+2}$ によって，z 平面上の次の図形は w 平面上のどんな図形に移るか．

(1) 円 $z\overline{z}-(2-i)z-(2+i)\overline{z}+3=0$

(2) 直線 $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-1=0$

270 次の方程式を解け．

(1) $(1+i)\overline{z}-3+4i=0$　　(2) $(2+i)z+(3-2i)\overline{z}=5$

(3) $z\overline{z}+2z-3\overline{z}-3+5i=0$

271 単純閉曲線 C と C 上にない 2 点 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha\neq\beta)$ について，次を証明せよ．

$$\int_C\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz=\begin{cases}0 & (\alpha,\ \beta\ が\ C\ の外部にあるとき)\\ 0 & (\alpha,\ \beta\ が\ C\ の内部にあるとき)\\ \dfrac{2\pi i}{\alpha-\beta} & (\alpha\ だけが\ C\ の内部にあるとき)\end{cases}$$

272 複素数 $z=x+iy$ （$x,\ y$ は実数，i は虚数単位）について，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$|e^{2z+i}+e^{iz^2}|\leqq e^{2x}+e^{-2xy}$$

（北海道大）

273 複素関数 $f(z)=f(x+iy)=(x^2-y^2)+ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ．また，そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ．（東京大）

274 $\alpha,\ \beta,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ は複素数で $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，$z_1+z_2+z_3=\alpha$，$z_1z_2z_3=\beta$ を満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}=\overline{\alpha}$ であることを証明せよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す．

(2) $z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2=\overline{\alpha}\beta$ であることを証明せよ．（静岡大）

(2) $\dfrac{f(+0)+f(-0)}{2}=\dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\,du=\frac{1}{2}$$

両辺の実部を比較して

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u-u\cos u}{u^3}\,du=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u-u\cos u}{u^3}\,du=\frac{\pi}{2}$$

183 (1) $g(x)=c_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

とおくと

$$与式=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)-g(x)\}^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\{g(x)\}^2dx \qquad ①$$

ここで

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,dx$$

$$=c_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right.$$

$$\left.+\,b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right)$$

$$=2\pi c_0^2+\pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)$$

また，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0\ (m\neq n)$ 等を用いると

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{g(x)\}^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{c_0^2+\sum_{n=1}^{N}(a_n^2\cos^2 nx\right.$$

$$\left.+\,b_n^2\sin^2 nx)\right\}dx$$

$$=2\pi c_0^2+\pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)$$

これらを①に代入すると

$$与式=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$$

$$-\left(2\pi c_0^2+\pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right)$$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{f(x)-g(x)\Big\}^2dx\geqq 0$

(1) より

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$$

$$-\left(2\pi c_0^2+\pi\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right)\geqq 0$$

$N\to\infty$ とすれば，次の不等式が得られる．

$$2c_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$$

4章 複素関数

1 正則関数

Basic

184 実部，虚部，絶対値，共役複素数の順に

(1) 8，6，10，$8-6i$

(2) -1，-7，$5\sqrt{2}$，$-1+7i$

(3) $\dfrac{2}{13}$，$\dfrac{3}{13}$，$\dfrac{1}{\sqrt{13}}$，$\dfrac{1}{13}(2-3i)$

(4) $-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{2}(-1+i)$

185 $\mathrm{Re}(z)=x$，$\mathrm{Im}(z)=y$

$\mathrm{Re}(z_k)=x_k$，$\mathrm{Im}(z_k)=y_k\ (k=1,\ 2)$

とおくと

$$z=x+yi,\quad \overline{z}=x-yi$$

$$z_k=x_k+y_ki,\quad \overline{z_k}=x_k-y_ki$$

(1) $\mathrm{Re}(z_1-z_2)$

$$=\mathrm{Re}((x_1+y_1i)-(x_2+y_2i))$$

$$=\mathrm{Re}((x_1-x_2)+(y_1-y_2)i)$$

$$=x_1-x_2=\mathrm{Re}(z_1)-\mathrm{Re}(z_2)$$

(2) $\mathrm{Im}(z_1+z_2)$

$$=\mathrm{Im}((x_1+y_1i)+(x_2+y_2i))$$

$$=\mathrm{Im}((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i)$$

$$=y_1+y_2=\mathrm{Im}(z_1)+\mathrm{Im}(z_2)$$

(3) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{x+yi}\right)$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{\mathrm{Re}(z)}{\{\mathrm{Re}(z)\}^2+\{\mathrm{Im}(z)\}^2}$$

(4) $\mathrm{Im}(z^2)=\mathrm{Im}((x+yi)^2)$

$$=\mathrm{Im}((x^2-y^2)+2xyi)$$

$$=2xy=2\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)$$

(5) z が実数ならば　$z=\mathrm{Re}(z)$

よって　$|z|=|\mathrm{Re}(z)|$

逆に，$|z|=|\mathrm{Re}(z)|$ ならば

$$x^2+y^2=|z|^2=|\mathrm{Re}(z)|^2=x^2$$

すなわち，$y=0$ となり，z は実数である．

(6) z が純虚数ならば　$z=i\,\mathrm{Im}(z)$

よって　$|z|=|i\,\mathrm{Im}(z)|=|\mathrm{Im}(z)|$

逆に，$|z|=|\mathrm{Im}(z)|$ ならば

$$x^2+y^2=|z|^2=|\mathrm{Im}(z)|^2=y^2$$

すなわち，$x=0$ となり，z は純虚数である．

186 (1) $\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$

(2) $2e^{\frac{11}{6}\pi i}=2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

(3) $2e^{\frac{3}{2}\pi i}=2\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$

(4) $3e^{\pi i}=3\,(\cos\pi+i\sin\pi)$

187 (1) $|e^{-i\theta}|=|e^{i(-\theta)}|=|\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)|$

$$=\sqrt{\cos^2(-\theta)+\sin^2(-\theta)}=\sqrt{1}=1$$

(2) $\overline{e^{-i\theta}}=\overline{e^{i(-\theta)}}=\overline{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}$

$$=\overline{\cos\theta-i\sin\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

188 (1) $\sqrt{26}$　　　(2) 10

189 $\overrightarrow{\mathrm{O}(z_1-z_2)}=\overrightarrow{\mathrm{O}z_1}+\overrightarrow{\mathrm{O}(-z_2)}$ より

$$|z_1-z_2|\leqq|z_1|+|-z_2|=|z_1|+|z_2|$$

190 (1) 点 z を原点のまわりに $\dfrac{3\pi}{4}$ 回転した点を z_1 とし，線分 $\mathrm{O}z_1$ を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した端の点

(2) 点 z を原点のまわりに $\dfrac{3\pi}{2}$ 回転した点を z_2 とし，線分 $\mathrm{O}z_2$ を 3 倍に拡大した端の点

(3) 点 z を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転した点を z_3 とし，線分 $\mathrm{O}z_3$ を $\dfrac{1}{2}$ 倍に拡大した端の点

191 $(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))^n=(e^{i(-\theta)})^n=e^{in(-\theta)}$

$$=e^{i(-n\theta)}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

$$=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

192 (1) $8(1+i)$　　　(2) $\dfrac{1}{16}$

193 (1) $z=\pm1$，$\pm i$，$\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$

(2) $z=3i$，$\dfrac{3}{2}(\pm\sqrt{3}-i)$

194 (1) 1　　　(2) $-ei$

(3) $\cos 1-i\sin 1$

195 (1) $\overline{e^{\overline{z}}}=\overline{e^{x-iy}}=\overline{e^x(\cos y-i\sin y)}$

$$=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$=e^{x+iy}=e^z$$

(2) $|e^{i\,\mathrm{Re}(z)}|=|\cos\mathrm{Re}(z)+i\sin\mathrm{Re}(z)|$

$$=\sqrt{\cos^2\mathrm{Re}(z)+\sin^2\mathrm{Re}(z)}=1$$

196 (1) $\cos(z+\pi)=\dfrac{e^{i(z+\pi)}+e^{-i(z+\pi)}}{2}$

$$=\frac{e^{iz}e^{i\pi}+e^{-iz}e^{-i\pi}}{2}$$

$$=\frac{-e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$

$$=-\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=-\cos z$$

$$\sin(z+\pi)=\frac{e^{i(z+\pi)}-e^{-i(z+\pi)}}{2i}$$

$$=\frac{e^{iz}e^{i\pi}-e^{-iz}e^{-i\pi}}{2i}$$

$$=\frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$$

$$=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z$$

(2) $\sin z_1\ \cos z_2-\cos z_1\ \sin z_2$

$$=\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}$$

$$-\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$

$$=\frac{2e^{iz_1-iz_2}-2e^{-iz_1+iz_2}}{4i}$$

$$=\frac{e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}}{2i}$$

$$=\sin(z_1-z_2)$$

(3) $\cos z_1\ \cos z_2+\sin z_1\ \sin z_2$

$$=\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}$$

$$+\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$

$$=\frac{2e^{iz_1-iz_2}+2e^{-iz_1+iz_2}}{4}$$

$$= \frac{e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}}{2}$$
$$= \cos(z_1-z_2)$$

197 $\cos(z+\pi)\sin(z+\pi)$
$= (-\cos z)(-\sin z) = \cos z\sin z$

198 絶対値 r^3，偏角 3θ の点

199 (1) 中心が点 i，半径 $\sqrt{2}$ の円
(2) 中心が点 $\frac{1}{4}$，半径 $\frac{1}{4}$ の円（0 を除く）

200 (1) 2　(2) 16　(3) 2

201 (1) $5z^4+4iz^3-9z^2-2iz+1$
(2) $\dfrac{1}{(z-i)^2}$
(3) $5(z^2-iz+2)^4(2z-i)$

202 (1) $u=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$，$v=-\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$
(2) $u=x^2-(y-1)^2$，$v=2x(y-1)$
(3) $u=9x^2-y^2$，$v=-6xy$

203 (1) 正則でない
(2) 正則，$f'(z)=12xy+6(-x^2+y^2)i$

204 $g(z)=z^2+iz+2$

205 $-\dfrac{1}{\sin^2 z}$

206 $u_{xx}+u_{yy}=0$ を示せ．
$f(z)=(x+yi)^4$ を計算せよ．

207 (1) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$
(2) $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$
(3) $\pm\sqrt{2}(1+i)$
(4) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$

208 (1) $\log 2+\left(-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right)i$（$n$ は整数）
(2) $\log 5+\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)i$（$n$ は整数）

209 $w=\sqrt{z}$ とすると
$w^2=z$，$\dfrac{dz}{dw}=2w=2\sqrt{z}$
よって　$(\sqrt{z})'=\dfrac{dw}{dz}=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}$

Check

210 実部，虚部，絶対値，共役複素数の順に
(1) -9，7，$\sqrt{130}$，$-9-7i$
(2) 5，1，$\sqrt{26}$，$5-i$
(3) $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
(4) $\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{10}}{2}$，$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$　⇨184

211 (1) $2e^{\frac{\pi}{3}i}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
(2) $e^{\frac{11\pi}{6}i}=\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi$
(3) $e^{\frac{3\pi}{2}i}=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$　⇨186

212 (1) $|z_1+z_2+z_3| \leqq |z_1+z_2|+|z_3|$
$\leqq |z_1|+|z_2|+|z_3|$
(2) $z_2=(z_1+z_2)+(-z_1)$ より
$|z_2| \leqq |z_1+z_2|+|-z_1|$
$=|z_1+z_2|+|z_1|$
よって　$-|z_1+z_2| \leqq |z_1|-|z_2|$
また，$z_1=(z_1+z_2)+(-z_2)$ より
$|z_1| \leqq |z_1+z_2|+|-z_2|$
$=|z_1+z_2|+|z_2|$
よって　$|z_1|-|z_2| \leqq |z_1+z_2|$　⇨189

213 (1) $-e$　(2) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e^{\pi}}+e^{\pi}\right)$
(3) $\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)i$　⇨194

214 (1) $z=x+i$ に対して $w=2x+3i$
よって，直線 $\mathrm{Im}(w)=3$ に移る．
(2) $z=1+2e^{it}$ に対して $w=2+i+4e^{it}$
よって，$2+i$ を中心とする半径 4 の円
$|w-(2+i)|=4$ に移る．　⇨199

215 (1) -1　(2) $\dfrac{1}{2}$　⇨200

216 (1) $3z^2+(2-2i)z-i$
(2) $\dfrac{-2i}{(z-i)^3}$　⇨201

217 (1) 正則でない
(2) 正則，$f'(z)=2y+(-2x-5)i$
(3) 正則，$f'(z)=e^{-y}(-\sin x+i\cos x)$　⇨203

218 (1) $\varphi_{xx}=-\varphi_{yy}=6y$ を用いよ．
(2) $\varphi_{xx}=-\varphi_{yy}=e^{-x}\sin y$ を用いよ．　⇨206

219 (1) $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}(1+i)$　(2) $\log 2+\left(\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi\right)i$
⇨207,208

Step up

220 $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$，$y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ より
(1) $1+2zi$　(2) $z^2+\overline{z}$

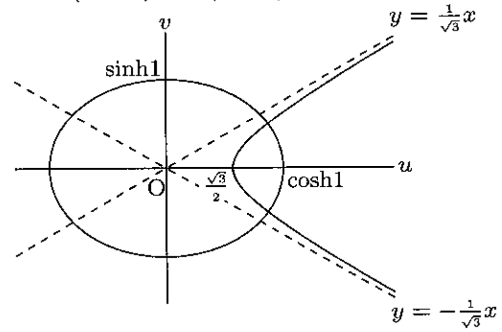
221 $(z-\alpha)(\overline{z-\alpha})=|z-\alpha|^2=r^2$ より，
$(z-\alpha)(\overline{z-\alpha})$ を展開して整理せよ．

222 (1) $z=\dfrac{4i+\sqrt{-20}}{2}$
$=\dfrac{4i\pm 2\sqrt{5}i}{2}=(2\pm\sqrt{5})i$
(2) $z=\dfrac{2i+\sqrt{4i}}{2}$
$=\dfrac{2i\pm\sqrt{2}(1+i)}{2}$
$=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}i$　（複号同順）

223 例題と同様に，加法定理を用いよ．

224 $w=u+vi=z+\dfrac{1}{z}$ に $z=te^{i\alpha}$ を代入すると
$u=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\cos\alpha$，$v=\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\sin\alpha$
$\alpha=0$ のとき
$u=t+\dfrac{1}{t} \geqq 2$（相加平均と相乗平均の関係）
$v=0$
$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき
$u=0$，$v=t-\dfrac{1}{t}$（全実数）
$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき
$t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{u}{\cos\alpha}\ (\geqq 2)$，$t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{v}{\sin\alpha}$
両辺を 2 乗して引くと　$4=\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha}-\dfrac{v^2}{\sin^2\alpha}$
$\therefore\ \dfrac{u^2}{(2\cos\alpha)^2}-\dfrac{v^2}{(2\sin\alpha)^2}=1$，$u>0$

225 $z=\dfrac{\pi}{3}+it$ のとき
$w=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+it\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cosh t+i\cos\dfrac{\pi}{3}\sinh t$
$\therefore\ u=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\ (>0)$，$v=\dfrac{1}{2}\sinh t$
これと $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ より
双曲線 $\dfrac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\dfrac{v^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$ の $u>0$ の部分
$z=t+i\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のとき
$w=\sin(t+i)=\sin t\cosh 1+i\cos t\sinh 1$
$\therefore\ u=\cosh 1\ \sin t$，$v=\sinh 1\ \cos t$
これと $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より
楕円 $\dfrac{u^2}{(\cosh 1)^2}+\dfrac{v^2}{(\sinh 1)^2}=1$



$(\cosh 1 \fallingdotseq 1.54,\ \sinh 1 \fallingdotseq 1.18)$

226 $u_{xx}+u_{yy}=0$ を示せ．
正則関数はコーシー・リーマンの関係式を用いて，
例題と同様に求めよ．（c は実数の任意定数とする．）
(1) z^2+ci　(2) e^z+ci

2 積分

Basic

227 (1) $z=i+2e^{it}\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$
(2) $z=3(1-t)-it\ (0 \leqq t \leqq 1)$

228 (1) $\dfrac{3}{2}+2i$　(2) $-\dfrac{4}{3}i$

229 (1) $2\pi i$　(2) 0

230 (1) $-\dfrac{1}{2}+i$　(2) $-\dfrac{2}{5}$　(3) $-\dfrac{1}{2}$

231 (1) -1　(2) $\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{e}-e\right)$

232 (1) 0　　(2) $2\pi i$

233 (1) $a=2,\ b=1$　　(2) $6\pi i$

234 (1) $2\pi i$　　(2) 0　　(3) $2\pi i$

235 (1) $-2\pi i$　　(2) $-8\pi i$

236 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(z-1)+\frac{1}{8}(z-1)^2+\cdots$

$+\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n+\cdots\ (|z-1|<2)$

237 (1) $-\frac{1}{z+3}-1-(z+3)-(z+3)^2-\cdots$

$-(z+3)^{n-1}-\cdots\ (0<|z+3|<1)$

(2) $\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}+1-(z-2)+\cdots$

$+(-1)^n(z-2)^{n-2}+\cdots$

$(0<|z-2|<1)$

238 (1) $\mathrm{Res}\,[f,\ 2]=\frac{7}{4},\ \mathrm{Res}\,[f,\ -2]=\frac{1}{4}$

(2) $\mathrm{Res}\,[f,\ 0]=\frac{1}{6}$

(3) $\mathrm{Res}\,[f,\ 2i]=(1-2i)e^{-2i}$

(4) $\mathrm{Res}\,[f,\ 0]=-\frac{5}{16},\ \mathrm{Res}\,[f,\ 4]=\frac{5}{16}$

239 (1) $4\pi i$　　(2) $2\pi i$

(3) $\frac{\pi i}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$

240 (1) $2\pi i$　　(2) 2π

Check

241 (1) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$　　(2) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$

(3) $-i$　　(4) $-\frac{\pi}{2}i$

⇒228,229,230

242 (1) $15+\frac{20}{3}i$

(2) $(1-\pi)e^{\pi}-1+2\pi i$　⇒231

243 (1) $\frac{2\pi}{e^2}i$　　(2) $\pi\left(\frac{1}{e}-e\right)$

(3) $-\pi(1+i)$　　(4) $2\pi i$　⇒235

244 (1) $-1+\frac{1}{3!}(z-\pi)^2-\frac{1}{5!}(z-\pi)^4+\cdots$

$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n}+\cdots\ (z\neq\pi)$

(2) 孤立特異点 -3 を中心とするローラン展開は

$\frac{1}{z+3}-1+(z+3)-\cdots$

$+(-1)^n(z+3)^{n-1}+\cdots$

$(0<|z+3|<1)$

孤立特異点 -4 を中心とするローラン展開は

$-\frac{1}{z+4}-1-(z+4)-\cdots$

$-(z+4)^{n-1}-\cdots\ (0<|z+4|<1)$

⇒237

245 (1) $\mathrm{Res}[f,\ 0]=-1,\ \ \mathrm{Res}[f,\ 1]=\cos 1$

(2) $\mathrm{Res}[f,\ 0]=-1,\ \ \mathrm{Res}[f,\ -1]=1$

(3) $\mathrm{Res}[f,\ 3i]=-\frac{1}{6}ie^{-3i}$

$\mathrm{Res}[f,\ -3i]=\frac{1}{6}ie^{3i}$

(4) $\mathrm{Res}[f,\ 0]=0,\ \ \mathrm{Res}[f,\ i]=-\frac{1}{e}i$　⇒238

246 (1) $\frac{11\pi}{2}i$　　(2) $2\pi i\sin 3$

(3) $-\frac{\pi e^i}{2}(2+i)$　⇒239

247 (1) πi　　(2) π　⇒240

Step up

248 (1) $1+z^3+z^6+\cdots+z^{3(n-1)}+\cdots$

収束半径 1

(2) $1+3z+9z^2+\cdots+3^{n-1}z^{n-1}+\cdots$

収束半径 $\frac{1}{3}$

(3) (2) を項別に微分せよ．

$1+6z+27z^2+\cdots+n\cdot 3^{n-1}z^{n-1}+\cdots$

収束半径 $\frac{1}{3}$

(4) $z-i=u$ とおき

与式 $=\frac{1}{1-i}\,\frac{1}{1-\frac{u}{1-i}}$

と変形せよ．

$\frac{1+i}{2}+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2(z-i)+\cdots$

$+\left(\frac{1+i}{2}\right)^n(z-i)^{n-1}+\cdots$

収束半径 $\sqrt{2}$

249 $z^4-16=(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)$ より

$f(z)=\frac{z}{z^4-16}$ の孤立特異点は点 $\pm2,\ \pm2i$

$\mathrm{Res}[f,\ 2]=\frac{1}{16},\ \mathrm{Res}[f,\ -2]=\frac{1}{16}$

$\mathrm{Res}[f,\ 2i]=-\frac{1}{16},\ \mathrm{Res}[f,\ -2i]=-\frac{1}{16}$

(1) 2 は円 C の内部にあるから

$\int_C\frac{z}{z^4-16}\,dz=2\pi i\times\frac{1}{16}=\frac{\pi}{8}i$

(2) $\pm2i$ は四角形 C の内部にあるから

$\int_C\frac{z}{z^4-16}\,dz$

$=2\pi i\left(-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)=-\frac{\pi}{4}i$

250 (1) 曲線 $C=C_1+C_2+C_3$ の内部にある関数

$f(z)=\frac{1}{z^2+3}$ の孤立特異点は $\sqrt{3}\,i$ で

$\mathrm{Res}[f,\ \sqrt{3}\,i]=\frac{1}{2\sqrt{3}\,i}$

$\therefore\ \int_C\frac{dz}{z^2+3}=2\pi i\times\frac{1}{2\sqrt{3}\,i}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(2) $\int_{C_1+C_2}\frac{dz}{z^2+3}+\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ より

$\int_{C_1+C_2}\frac{dz}{z^2+3}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

251 関数 $f(z)=\frac{\sqrt{z}}{z-1}$ の C の内部にある孤立特異点は 1 である．$\frac{\pi}{2}<\arg\sqrt{z}\leqq\frac{3}{2}\pi$ より

$\mathrm{Res}[f,\ 1]=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\sqrt{z}=-1$

$\therefore\ \int_C\frac{\sqrt{z}}{z-1}\,dz=2\pi i\mathrm{Res}[f,\ 1]=-2\pi i$

252 C 上で $f(z)=g(z)$ だから，コーシーの積分表示より

$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$

$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{g(z)}{z-\alpha}\,dz=g(\alpha)$

253 (1) $\pm i$ は $f(z)=\frac{e^{-z}}{z^2+1}$ の 1 位の極である．例題と $(z^2+1)'=2z$ を用いて

$\mathrm{Res}[f,\ i]=\left(\frac{e^{-z}}{2z}\right)_{z=i}=\frac{e^{-i}}{2i}$

$\mathrm{Res}[f,\ -i]=\left(\frac{e^{-z}}{2z}\right)_{z=-i}=-\frac{e^{i}}{2i}$

(2) $-1,\ e^{\frac{\pi}{3}i}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ e^{-\frac{\pi}{3}i}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ は $f(z)=\frac{z}{z^3+1}$ の 1 位の極である．

$\frac{z}{(z^3+1)'}=\frac{1}{3z}$ より，(1) と同様にして

$\mathrm{Res}[f,\ -1]=-\frac{1}{3}$

$\mathrm{Res}[f,\ e^{\frac{\pi}{3}i}]=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{6}$

$\mathrm{Res}[f,\ e^{-\frac{\pi}{3}i}]=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{6}$

254 $z=e^{i\theta}$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ のとき，z は単位円 C を 1 周する．

$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$

$\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}=iz$ より　$d\theta=\frac{1}{iz}\,dz$

(1) $5+3\sin\theta=\frac{3z^2+10iz-3}{2iz}$

$=\frac{(3z+i)(z+3i)}{2iz}$ より

$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$

$=\int_C\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}\,dz$

C の内部にある孤立特異点は $-\frac{i}{3}$ で，留数は $-\frac{1}{4}i$

$\therefore\ \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\sin\theta}=\frac{\pi}{2}$

(2) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5+4\sin\theta)^2}$

$=\int_C\frac{iz}{(2z+i)^2(z+2i)^2}\,dz$

C の内部にある孤立特異点は $-\frac{i}{2}$ で，留数を求めると

$\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\left\{\left(z+\frac{i}{2}\right)^2f(z)\right\}'$

$=\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\left(\frac{iz}{4(z+2i)^2}\right)'$

$=\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\frac{-iz-2}{4(z+2i)^3}=-\frac{5}{27}i$

$\therefore\ \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5+4\sin\theta)^2}=\frac{10}{27}\pi$

255 (1) 例題と同様に半円 $C_R\ (R>2)$ と線分 C をとり，$f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z^2+4)^2}$ とおく．

C_R+C の内部にある孤立特異点は $2i$ で，留数は

$\lim_{z\to2i}\{(z-2i)^2f(z)\}'=\frac{1}{8e^2}$

$$\therefore \quad \int_{C+C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{4e^2}i$$

一方，この左辺の積分は

$$\int_{C_R} f(z)\,dz + \int_C f(z)\,dz$$
$$= \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{(x^2+4)^2}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx$$
$$= \int_{C_R} f(z)\,dz + i\int_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx$$

第 1 項で，$z = Re^{it}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ のとき

$$|e^{iz}| = e^{-R\sin t} \leqq 1$$

であることを用いると

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqq \frac{\pi R^2}{(R^2-4)^2} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

したがって $\quad i\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{\pi}{4e^2}i$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{\pi}{4e^2}$$

(2) 例題と同様に半円 C_R $(R > 2)$ と線分 C をとり，$f(z) = \dfrac{2e^{iz}}{z^4+5z^2+4}$ とおく．

$C_R + C$ の内部にある孤立特異点は $i,\ 2i$ で，留数はそれぞれ $-\dfrac{1}{3e}i,\ \dfrac{1}{6e^2}i$

(1) と同様に

$$\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0 \quad (R \to \infty)$$

となるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\cos x}{x^4+5x^2+4}\,dx = 2\pi i\left(-\frac{1}{3e}i + \frac{1}{6e^2}i\right) = \frac{2e-1}{3e^2}\pi$$

Plus

1　1 次分数関数

256 直線 $v = \sqrt{3}u$

2　n 価関数

257 $w = \sqrt[4]{z}$ とすると

$$w^4 = z,\quad \frac{dz}{dw} = 4w^3 = 4\left(\sqrt[4]{z}\right)^3$$

よって $\quad (\sqrt[4]{z})' = \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{4\left(\sqrt[4]{z}\right)^3}$

3　対数関数の主値

258 (1) $z = 2n\pi - i\log(-3+\sqrt{10})$,

$(2n+1)\pi - i\log(3+\sqrt{10})$　(n は整数)

(2) $z = \left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi - i\log(2\pm\sqrt{3})$　(n は整数)

4　一般のべき関数

259 $z = re^{i\theta}$ とおくと

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \text{ は整数})$$

これより

$$z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\log z} = e^{\frac{1}{3}\log r}e^{i\frac{\theta}{3}}e^{i\frac{2n\pi}{3}}$$
$$= \sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta}{3}}\omega_0,\ \sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta}{3}}\omega_1,\ \sqrt[3]{r}e^{i\frac{\theta}{3}}\omega_2$$

(ただし，$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2$ は 1 の 3 乗根)

すなわち $\quad z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{z}$

260 n は任意の整数とする．

(1) $$(-2)^i = e^{i\log(-2)} = e^{i\{\log 2 + i(\pi+2n\pi)\}}$$
$$= e^{-(2n+1)\pi + i\log 2}$$
$$= e^{-(2n+1)\pi}(\cos\log 2 + i\sin\log 2)$$

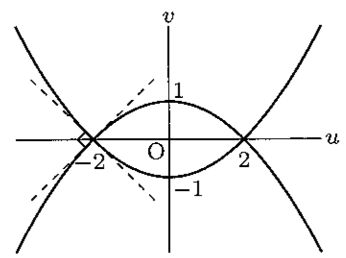
(2) $$i^{1+i} = e^{(1+i)\log i} = e^{(1+i)\left\{\log 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}}$$
$$= e^{-\frac{4n+1}{2}\pi + \frac{\pi}{2}i} = ie^{-\frac{4n+1}{2}\pi}$$

(3) $$(1+i)^i = e^{i\log(1+i)}$$
$$= e^{i\left\{\log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2n\pi\right)\right\}}$$
$$= e^{-\frac{8n+1}{4}\pi + i\frac{\log 2}{2}}$$
$$= e^{-\frac{8n+1}{4}\pi}\left(\cos\frac{\log 2}{2} + i\sin\frac{\log 2}{2}\right)$$

5　正則関数による写像の等角性

261 $x = 1$ の像 $\quad v = 1 - \dfrac{1}{4}u^2$

$y = 1$ の像 $\quad v = \dfrac{1}{4}u^2 - 1$



6　補章関連

262 (1) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$　　(2) $\dfrac{i}{2}\log 3$

263 (1) C_2 上で $|e^{-z^2}| = e^{4Rt-4R^2}$ であることを用いよ．

(2) $C,\ C_1$ に沿う積分を求め，コーシーの積分定理を用いよ．

(3) (2) の実部，虚部を比較せよ．

264 $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(2t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ と置換積分を用いよ．$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$

265 (1) 0 を中心とするローラン展開を求めよ．

(2) $|1 - e^{iz}| \leqq 1 + |e^{iz}|$ を用いよ．

(3) $e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$ を用いよ．

(4) $r \to 0,\ R \to \infty$ とせよ．

266 $\displaystyle\int_{C_R+C} f(z)\,dz = \frac{\pi}{e}$ を示し，例題の不等式を用いて，$R \to \infty$ とし，実部を比較せよ．

7　いろいろな問題

267 (1) $\sqrt{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}\right)i}$ より $\sqrt{2}e^{\frac{7}{12}\pi i},\ \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}$

(2) $2e^{\left(\frac{5\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}\right)i}$ より $2e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\sqrt{3}-i,\ 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2i$

268 $z = x + yi$ とおくと

(1) $(2+i)z = 2x - y + i(x+2y)$ より

直線 $2x - y = 1$

(2) $(5x)^2 + (5y-1)^2 = (3x)^2 + (3y-7)^2$ より

中心 $-i$，半径 2 の円

269 (1) $z = \dfrac{1+2w}{1-w}$ を円の方程式に代入して整理すると

$$w\overline{w} - \frac{1-i}{5}w - \frac{1+i}{5}\overline{w} = 0$$
$$\left|w - \frac{1+i}{5}\right|^2 = \frac{2}{5^2}$$

よって，中心 $\dfrac{1+i}{5}$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ の円に移る．

(2) $z = \dfrac{1+2w}{1-w}$ を直線の方程式に代入して整理すると

$$w\overline{w} - \frac{1-i}{3}w - \frac{1+i}{3}\overline{w} - \frac{1}{3} = 0$$
$$\left|w - \frac{1+i}{3}\right|^2 = \frac{5}{3^2}$$

よって，中心 $\dfrac{1+i}{3}$，半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ の円に移る．

270 (2), (3) は $z = x + yi$ を代入して，両辺の実部と虚部を比較し，x, y の連立方程式を解け．

(1) $\overline{z} = \dfrac{3-4i}{1+i} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2}i$ より

$z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2}i$

(2) $z = \dfrac{5}{8} - \dfrac{5}{8}i$　　(3) $z = 2 - i,\ -1 - i$

271 $f(z) = \dfrac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ とおく．

(i) $\alpha,\ \beta$ が C の外部にあるとき

コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$

(ii) $\alpha,\ \beta$ が C の内部にあるとき

$$\mathrm{Res}[f,\ \alpha] = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = \frac{1}{\alpha-\beta}$$
$$\mathrm{Res}[f,\ \beta] = \lim_{z\to\beta}(z-\beta)f(z) = \frac{1}{\beta-\alpha}$$

留数定理より

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}[f,\ \alpha] + \mathrm{Res}[f,\ \beta]) = 0$$

(iii) α だけが C の内部にあるとき

留数定理より

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\mathrm{Res}[f,\ \alpha] = \frac{2\pi i}{\alpha-\beta}$$

272 $\left|e^{2z+i} + e^{iz^2}\right| \leqq \left|e^{2z+i}\right| + \left|e^{iz^2}\right|$

$$= \left|e^{2x+i(2y+1)}\right| + \left|e^{-2xy+i(x^2-y^2)}\right|$$
$$= e^{2x} + e^{-2xy}$$

273 $u = x^2 - y^2,\ v = bxy$ とするとき，$f(z)$ が正則であるための必要十分条件は

$$u_x = v_y \text{ かつ } u_y = -v_x$$

すなわち $\quad 2x = bx$ かつ $-2y = -by$

よって $\quad b = 2$

このとき　$f'(z)=u_x+iv_x=2x+2iy=2z$

274 (1) $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ より

$$z_k\overline{z_k}=|z_k|^2=1\ (k=1,\ 2,\ 3)$$

よって

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{z_1\overline{z_1}}{z_1}+\frac{z_2\overline{z_2}}{z_2}+\frac{z_3\overline{z_3}}{z_3}$$
$$=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=\overline{z_1+z_2+z_3}=\overline{\alpha}$$

(2) $z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$

$$=\frac{z_1z_2z_3}{z_1}+\frac{z_1z_2z_3}{z_2}+\frac{z_1z_2z_3}{z_3}$$
$$=\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)z_1z_2z_3=\overline{\alpha}\beta$$