Basic

202 あるさいころを5回投げたところ，1の目が2回出た．次の問いに答えよ． →教p.102 問·1

(1) 仮説「このさいころで1の目が出る確率 p は $\dfrac{1}{6}$ より大きい」について，H_0，H_1 を作れ．

(2) あらためて5回投げたところ，1の目が3回出た．この結果をもとに有意水準5%で仮説検定せよ．

203 全国の小学校新入生男子の身長は正規分布に従い，平均116.2cmであることが知られている．ある地方で10人の新入生男子について身長を測定したところ，標本平均は $\overline{x}=118.9$，不偏分散は $u^2=24$ であった．このデータから，「この地方の新入生男子の平均身長は全国平均と異なる」について，有意水準5%で検定せよ． →教p.106 問·2

204 ある工場において，内容量が350mlである容器に入れる飲料の体積（単位ml）は，正規分布に従うように作られている．最近，内容量が350より少なくなったと苦情が寄せられた．そこで，この容器を15個無作為抽出して飲料の体積を調べたところ，標本平均は348.3，不偏分散は 3.9^2 であった．この容器の飲料の体積は350より少なくなったといえるか．有意水準5%で検定せよ． →教p.106 問·2

205 2種類のLEDランプA, Bについて，その消費電力を調べるために，それぞれ大きさ6, 10の標本を無作為抽出した．平均消費電力はそれぞれ単位時間あたり4.8W, 5.2W，不偏分散はそれぞれ 0.41^2，0.39^2 であった．この2種類のLEDランプの消費電力の差は有意であるか．正規母集団を仮定して，有意水準5%で検定せよ． →教p.108 問·3

206 数学のテストを無作為に抽出した男子12名，女子12名の学生に行ったところ，平均はそれぞれ66, 74，不偏分散はそれぞれ 6^2，10^2 であった．このテストにおいて，男女に差があると認められるか．正規母集団を仮定して，有意水準5%で検定せよ． →教p.108 問·3

207 ある実験室で毎年A社製のボルトを大量に購入している．規定の強度があり，それを満たしていない不良率は3%とされていた．最近強度が不足しているように感じたので，100本を無作為抽出して調べたところ強度不足の不良品が5本あった．不良率は3%より高くなったといえるか．有意水準5%で検定せよ． →教p.109 問·4

208 1つのさいころを150回投げたところ，1の目が32回出た．このさいころの1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるといってよいか．有意水準5%で検定せよ． →教p.109 問·4

Check

209 ある種のネズミの体重（単位g）は，生まれてから3ヶ月で平均70になる．この中の5匹に特別な餌を与えて飼育したところ，3ヶ月後の体重が

69.9　75.5　69.7　73.7　76.2

となった．この餌はこの種のネズミの体重に影響を与えるといえるか．有意水準5%で検定せよ．ただし，ネズミの体重は正規分布に従うものとする．

210 異なる地区にある2つの小学校で，新入生の男子8人と10人について身長（単位cm）の平均と不偏分散を調べたら，平均はそれぞれ116.9, 113.1，不偏分散はそれぞれ16.0, 22.0であった．2つの地区の平均身長に差があるといえるか．正規母集団を仮定して，有意水準5%で検定せよ．

211 ある地区では，タンパク質含有率が従来より高くなるとされる新種の小麦を栽培してタンパク質含有率（単位%）を測定することになった．従来の小麦8つと新種の小麦7つを選び測定したところ，それぞれ平均は12.6, 13.5と不偏分散は0.25, 0.73であった．新種の小麦は従来の小麦よりタンパク質含有率が高くなっているといえるか．正規母集団を仮定して，有意水準5%で検定せよ．

212 ある新薬を患者300人に投与したところ，250人が完治した．従来の薬では80%の患者が完治していたという．新薬は従来の薬より効果があるといってよいか．有意水準1%で検定せよ．

Step up

例題 ある硬貨は特殊な製造法により表が出やすいと噂されていた．そこで仮説「この硬貨の表が出る確率 p は $\frac{1}{2}$ より大きい」について，この硬貨を n 回投げる実験をして有意水準 5% で仮説検定することにした．次の問いに答えよ．

(1) 帰無仮説 H_0，対立仮説 H_1 を作れ．

(2) $p=\frac{3}{4}$ として，$n=5$, 15 のときの検出力をそれぞれ求めよ．

(3) $n=15$ で実験したところ，表が 12 回出た．有意水準 5% で仮説検定せよ．

解 (1) $H_0: p=\frac{1}{2}$，$H_1: p>\frac{1}{2}$

(2) 実験の結果表が出る回数を X とする．

$n=5$ の場合，H_0 が正しいとき

$$P(X=4)=0.156,\ P(X=5)=0.031$$

したがって，$X=5$ のときのみ棄却される．$p=\frac{3}{4}$ とすると

$$P(X=5)=0.237$$

よって，検出力は 0.237 である．

同様に $n=15$ の場合，H_0 が正しいとき

$$P(X \geqq 11)=0.059,\ P(X \geqq 12)=0.018$$

したがって，$X \geqq 12$ のとき棄却される．$p=\frac{3}{4}$ とすると

$$P(X \geqq 12)=0.461$$

よって，検出力は 0.461 である．

(3) p 値は $p=P(X \geqq 12)=0.018<0.05$ より，帰無仮説は棄却され，表が出る確率は $\frac{1}{2}$ より大きいといえる． //

●注…n が大きくなると検出力も大きくなる．対立仮説について特定の状況を想定して，そのときの検出力がある程度以上になるように n を決定する場合もある．

213 あるゲームでは 1, 2, 3 の目が 2 つずつあるサイコロが使われる．このゲームで使うあるサイコロについて 1 の目が出る確率 p は $\frac{1}{3}$ より小さいのではないかという疑いが出てきた．そこでこのサイコロを 20 回投げて 1 の目が出る回数 X を観測し，有意水準 5% で仮説検定することにした．$p=\frac{1}{10}$ のときの検出力を求めよ．また，20 回投げて 1 の目が 4 回出たとして，仮説検定せよ．

例題 $N(\mu_1, \sigma_1{}^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2{}^2)$ からそれぞれ大きさ n_1, n_2 の標本をとり，平均を $\overline{X}$, $\overline{Y}$，不偏分散を $U_1{}^2$, $U_2{}^2$ とおく．$\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$ と考えられる場合は，$\mu_1=\mu_2$ を仮定したとき，統計量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{U^2(1/n_1+1/n_2)}} \quad \left(U^2=\frac{(n_1-1)U_1{}^2+(n_2-1)U_2{}^2}{n_1+n_2-2}\right)$$

は自由度 n_1+n_2-2 の t 分布に従うことが知られている．

いま，ある肥料の効果を調べるために，同一条件とみられる 11 地区に対して，5 地区は肥料を使用し，6 地区は肥料を使用しないで収穫量を測ったところ，それぞれの平均は 45.37, 41.25，不偏分散は 5.43, 4.83 であった．収穫量はそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$ に従うとし，有意水準を 5% として収穫量に違いがあるかどうかを検定せよ．

解 $H_0: \mu_1=\mu_2$，$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ とおく．H_0 が正しいとすると

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{U^2(1/5+1/6)}} \quad \left(U^2=\frac{4U_1{}^2+5U_2{}^2}{9}\right)$$

は自由度 9 の t 分布に従う．

実現値は $u^2=5.097$, $t=3.01$ となるから，アプリを用いて p 値を求めると

$$p=2\times P(T \geqq 3.01)=0.0148<0.05$$

または，t 分布表を用いると

$$P(T \geqq 3.0)=0.0075,\ P(T \geqq 3.1)=0.0064$$

$$p<2\times 0.0075=0.015<0.05$$

したがって H_0 は棄却され，収穫量は等しくないといえる． //

●注…この検定の予備検定として帰無仮説 $H_0: \sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$ の検定 (等分散検定) をすることが多い．等分散検定については 79 ページを参照せよ．

214 ある薬剤を飲むことにより，血圧（単位 mmHg）は上昇する可能性があるとされている．そのため，薬剤を飲んでいない人と，飲んだ人について測定を行ったところ，薬剤を飲んでいない人 6 人の平均と不偏分散は 127.0, 3.5，飲んだ人 7 人の平均と不偏分散は 130.0, 4.2 であった．この薬剤を飲むことによって血圧が上昇するといえるか．有意水準 5% で検定せよ．ただし，血圧は正規分布に従うものし，母分散は等しいものとしてよい．

Plus

1 —— 補章関連　母平均の区間推定（母分散が既知の場合）

→教 p.130

正規母集団 $N(\mu,\ \sigma^2)$ から大きさ n の無作為標本を抽出し，その標本平均の実現値を $\overline{x}$ とすると，母平均 μ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$\overline{x}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqq \mu \leqq \overline{x}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

で与えられる．

例題 ある池の面積を測定するために，測量士が5回面積を測定したところ平均12.3（単位 ヘクタール）であった．この池の面積の95％信頼区間を求めよ．ただし，測定値は正規分布 $N(\mu, 0.3^2)$ に従うとする．

解 分散は既知だから，$\overline{x}=12.3$，$\sigma^2=0.3^2$，$z_{0.025}=1.960$ より

$$12.3-1.960\sqrt{\frac{0.3^2}{5}} \leqq \mu \leqq 12.3+1.960\sqrt{\frac{0.3^2}{5}}$$

$$\therefore\quad 12.0 \leqq \mu \leqq 12.6$$ //

215 ある都市の無作為に抽出した18歳男子30人の身長（単位 cm）を測定したところ，その平均値が168.1であった．これを正規母集団 $N(\mu,\ 5.8^2)$ からの無作為標本とみて，その都市における平均身長 μ の99％信頼区間を求めよ．

2 —— 補章関連　母分散の区間推定

→教 p.131

正規母集団 $N(\mu,\ \sigma^2)$ から大きさ n の無作為標本を抽出し，その不偏分散の実現値を u^2 とすると，母分散 σ^2 の $1-\alpha$ 信頼区間は

$$\frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)} \leqq \sigma^2 \leqq \frac{(n-1)u^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}$$

で与えられる．

例題 ある会社で生産された大量のロープの中から20本を無作為抽出して，破断強度（単位 kg）を測定したところ，標本平均が254，不偏分散が56.0であった．このロープの破断強度は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとして，母分散の95％信頼区間を求めよ．

解 $u^2=56.0$，$\chi^2_{19}(0.025)=32.852$，$\chi^2_{19}(0.975)=8.907$ より

$$\frac{19\cdot 56.0}{32.852} \leqq \sigma^2 \leqq \frac{19\cdot 56.0}{8.907}$$

$$\therefore\quad 32.4 \leqq \sigma^2 \leqq 119.5$$ //

216 新しく導入した機械で作った部品から無作為に選んだ8個の重量（単位 kg）を測定したところ，次の値を得た．母分散 σ^2 の95％信頼区間を求めよ．ただし，重量は正規分布に従うとする．

6.12　6.52　6.43　6.61　6.28　6.70　6.09　6.27

3 —— 補章関連　母平均の検定（母分散が既知または標本が大きい場合）

→教 p.132

正規母集団 $N(\mu,\ \sigma^2)$ の母平均 μ について検定するとき，母分散 σ^2 が既知の場合は，検定統計量

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

が標準正規分布に従うことを用いる．σ^2 が未知の場合でも，標本の大きさ n が十分大きいときは

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{U^2/n}}$$

が標準正規分布に従うと考えてよい．

例題 ある一年草Aの6月の上旬における高さは正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと考えられている．一般に母平均 μ は15.0 cmとされているが，ある地域では母平均が異なる可能性が出てきた．そこでこの地域で6月上旬の200本のAについて高さを調べたところ，標本平均 $\overline{x}=15.6$，不偏分散 $u^2=3.0^2$ を得た．この地域におけるAの高さの母平均が15.0 cmと異なるかどうか，有意水準1％で検定せよ．

解 帰無仮説 $H_0: \mu=15.0$，対立仮説 $H_1: \mu \neq 15.0$ とおく．標本の大きさは十分大きいから，H_0 が正しいとすると検定統計量

$$Z=\frac{\overline{X}-15.0}{\sqrt{U^2/200}}$$

は標準正規分布に従う．Z の実現値 z は　$z=\dfrac{15.6-15.0}{\sqrt{3.0^2/200}}=2.83$

アプリまたは正規分布表を用いて，p 値を求めると

$$p=2\times P(Z \geqq 2.83)=0.0046<0.01$$

したがって，H_0 は棄却され，母平均は15.0とは異なるといえる． //

217 あるメーカーがこれまで平均寿命1500（単位 時間），標準偏差30に従う蛍光灯に改良を加えて，試作品から10本を選んでその寿命を調べたところその標本平均が1519であった．その寿命について，改良されたといえるか有意水準5％で検定せよ．ただし，母分散は変わっていないものとする．

218 国勢調査によると，近年の男子の平均身長は，20年前と比べて全体的に高くなっている．ある県の20年前の13歳男子の平均身長は159.4（単位 cm）であったが，今年同県の無作為抽出された13歳男子100人の身長の平均は160.2，不偏分散は5.2^2であった．13歳男子の平均身長は，20年前より高くなったといえるか．有意水準5％で検定せよ．ただし，13歳男子の身長は正規分布に従うものとする．

4——補章関連　母分散の検定

→㊫p.133

正規母集団$N(\mu,\ \sigma^2)$から大きさnの無作為標本をとる．仮説

$$\mathrm{H_0}: \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \qquad (\sigma_0 \text{ は定数})$$

が正しいと仮定すると，統計量

$$X = \frac{(n-1)U^2}{{\sigma_0}^2} \qquad (U^2 \text{ は不偏分散})$$

は自由度$n-1$のχ^2分布に従う．このことを用いて検定を行う．

例題 ある正規母集団において母分散は9.0より大きいと予想されていた．この予想について有意水準5％で検定するため，この母集団から大きさ16の標本を無作為抽出したところ，不偏分散の実現値として$u^2 = 14.0$を得た．この実現値に基づいて仮説検定せよ．

解 $\mathrm{H_0}: \sigma^2 = 9.0$，$\mathrm{H_1}: \sigma^2 > 9.0$とおく．
$\mathrm{H_0}$が正しいとすると，統計量

$$X = \frac{15 \cdot U^2}{9.0}$$

は自由度15のχ^2分布に従う．Xの実現値xは　$x = \dfrac{15 \cdot 14.0}{9.0} = 23.33$
アプリを用いてp値を求めると

$$p = P(X \geqq 23.33) = 0.0774 > 0.05$$

または，χ^2分布表を用いると

$$P(X \geqq 23) = 0.0841,\ P(X \geqq 24) = 0.0651$$

したがって　$p > 0.0651 > 0.05$
よって，$\mathrm{H_0}$は棄却されず，母分散が9.0より大きいとはいえない．　//

219 平均身長167cmの正規母集団から抽出した10人の身長は次のようになった．母分散は10といってよいか．有意水準5％で検定せよ．

165　166　172　160　159　173　164　161　169　170

5——補章関連　母平均の差の検定（標本が大きい場合）

→㊫p.135

2つの異なる正規母集団$N(\mu_1,\ {\sigma_1}^2)$，$N(\mu_2,\ {\sigma_2}^2)$から，それぞれ大きさn_1，n_2の標本を独立に無作為抽出し，仮説

$$\mathrm{H_0}: \mu_1 = \mu_2$$

を検定するとき，標本の大きさn_1とn_2が十分に大きいならば

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{{U_1}^2/n_1 + {U_2}^2/n_2}}$$

は近似的に標準正規分布に従う．

例題 ある学校の入学試験の得点は500点満点で毎年ほぼ正規分布に従うと言われている．この入学試験の得点について，昨年度と一昨年度で母平均に違いがあるか有意水準1％で検定することにした．そのため，昨年度と一昨年度の結果をまとめたところ，上の表のようになった．昨年度，一昨年度の母集団をそれぞれ$N(\mu_1,\ {\sigma_1}^2)$，$N(\mu_2,\ {\sigma_2}^2)$とし，母平均に違いがあるかどうか仮説検定せよ．

	昨年度	一昨年度
受験生	200	180
標本平均	350	370
不偏分散	60^2	80^2

解 $\mathrm{H_0}: \mu_1 = \mu_2$，$\mathrm{H_1}: \mu_1 \neq \mu_2$とおく．
$\mathrm{H_0}$が正しいとすると

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{{U_1}^2/200 + {U_2}^2/180}}$$

は近似的に標準正規分布に従う．
Zの実現値zは

$$z = \frac{350 - 370}{\sqrt{60^2/200 + 80^2/180}} = -2.73$$

アプリまたは正規分布表を用いて，p値を求めると

$$p = 2 \times P(Z \leqq -2.73) = 2 \times P(Z \geqq 2.73) = 0.0064 < 0.01$$

したがって，$\mathrm{H_0}$は棄却され，母平均に違いがあるといえる．　//

220 2つの異なる小学校で，新入生の男子60人と80人について身長（単位 cm）の平均と不偏分散を調べたら，平均はそれぞれ117.2，114.7，不偏分散はそれぞれ30.0，24.0であった．2つの小学校の平均身長に差があるといえるか．有意水準5％で検定せよ．

6——補章関連　適合度の検定

→㊫p.136

測定値の分布が，ある法則や条件に適合しているかどうかを検定する方法に，適合度の検定がある．ある試行において，実際に観測された度数を観測度数，期待さ

れるであろう度数を期待度数という．このとき統計量

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\text{観測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}} \qquad (1)$$

は，すべての期待度数が大きいとき，近似的に自由度 $m-1$ の χ^2 分布に従うことが知られている．(1) の X を検定統計量として，右側検定を行う．

例題 さいころを 120 回投げたところ，各目の出た回数は次のような結果となった．どの目の出る確率も等しいといってよいか．有意水準 5％ で検定せよ．

目	1	2	3	4	5	6
回数	19	11	29	23	13	25

解 帰無仮説 H_0，対立仮説 H_1 を次のようにおく．

H_0：どの目の出る確率も $\frac{1}{6}$ に等しい

H_1：どの目の出る確率も $\frac{1}{6}$ に等しいとはいえない

統計量 X を上記の (1) 式で定義する．期待度数はすべて 20 で大きいから，X は近似的に自由度 $(6-1)=5$ の χ^2 分布に従う．

X の実現値 x は

$$x = \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(11-20)^2}{20} + \cdots + \frac{(25-20)^2}{20} = 12.30$$

アプリを用いて p 値を求めると

$$p = P(X \geqq 12.30) = 0.0309 < 0.05$$

または，χ^2 分布表を用いると

$$P(X \geqq 12) = 0.0348,\ P(X \geqq 13) = 0.0234$$

したがって　$p < 0.0348 < 0.05$

よって，H_0 は棄却され，どの目の出る確率も等しいとはいえない．　//

221 メンデルは，エンドウの交配実験において，理論的に度数分布は 9 : 3 : 3 : 1 になると考えた．右の表の実験結果は，理論に適合していると考えられるか．有意水準 5％ で検定せよ．

形質	観測回数
黄・丸	319
黄・しわ	97
緑・丸	112
緑・しわ	28
計	556

222 2 枚の硬貨を 100 回投げたところ，2 枚とも表の場合が 32 回，2 枚とも裏の場合が 21 回，1 枚表 1 枚裏の場合が 47 回であった．この硬貨の表と裏の出る確率は等しくないといってよいか．有意水準 5％ で検定せよ．

7—補章関連　独立性の検定

→教p.137

母集団のもつ 2 種類以上の特性が互いに関係があるか，あるいは独立であるかを検定する方法に，独立性の検定がある．一般に，観測値は表の形にまとめられる．これを**分割表**という．分割表の行数を l，列数を m とすると，統計量

$$X = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m} \frac{(\text{観測度数} - \text{期待度数})^2}{\text{期待度数}} \qquad (1)$$

は，すべての期待度数が大きいとき，近似的に自由度 $(l-1)\times(m-1)$ の χ^2 分布に従うことが知られている．(1) の X を検定統計量として，右側検定を行う．

例題 ある新薬を患者に用いて，病状に変化があるかどうかを調べたところ，右の表のようになった．新薬は病状に影響を及ぼすかどうかについて，有意水準 5％ で検定せよ．

新薬＼病状	回復	回復せず	計
使用	72	28	100
使用せず	58	42	100
計	130	70	200

解 帰無仮説 H_0，対立仮説 H_1 を次のようにおく．

H_0：新薬は影響を及ぼさない（独立である）

H_1：新薬は影響を及ぼす（独立でない）

H_0 が正しいと仮定するとき，1 行 1 列，1 行 2 列の期待度数は，それぞれ

$$200 \times \frac{100}{200} \times \frac{130}{200} = 65$$

$$200 \times \frac{100}{200} \times \frac{70}{200} = 35$$

よって，期待度数の分割表は右の表のようになる．

新薬＼病状	回復	回復せず	計
使用	65	35	100
使用せず	65	35	100
計	130	70	200

統計量 X を上記の (1) 式で定義する．すべての期待度数が大きいから，X は近似的に自由度 $(2-1)\times(2-1)=1$ の χ^2 分布に従う．

X の実現値 x は

$$x = \frac{(72-65)^2}{65} + \frac{(28-35)^2}{35} + \frac{(58-65)^2}{65} + \frac{(42-35)^2}{35} = 4.31$$

アプリを用いて p 値を求めると

$$p = P(X \geqq 4.31) = 0.0379 < 0.05$$

または，χ^2 分布表を用いると

$$P(X \geqq 4) = 0.0455,\ P(X \geqq 5) = 0.0253$$

したがって　$p < 0.0455 < 0.05$

よって，H_0 は棄却され，影響を及ぼすといえる．　//

4章 推定と検定

223 3つのクラス A, B, C の試験に合格した学生と不合格になった学生の人数を調べたところ，右の表のようになった．クラスによる合否の違いがあるか．有意水準5％で検定せよ．

試験＼クラス	A	B	C	計
合格	38	32	42	112
不合格	10	16	6	32
計	48	48	48	144

8——補章関連　棄却域による検定

→教p.140

有意水準によって，帰無仮説を棄却すべき検定統計量の範囲を設定し，その範囲に検定統計量の実現値が入るかどうかを調べる．入れば帰無仮説は棄却され，入らなければ受容される．

帰無仮説が棄却される範囲を棄却域といい，棄却域は帰無仮説の下で検定統計量がそこに入る確率が有意水準と一致するように定められる．

例題 ある工場で製造されるスチールボールの直径の規格は 13mm となっている．いま検査のため 80 個を無作為抽出してその直径を測定したところ，平均 12.975（単位 mm），不偏分散 0.11^2 であった．このスチールボールの直径の平均は 13 であるといってよいか．有意水準5％で検定せよ．

解 帰無仮説 H_0，対立仮説 H_1 を次のようにおく．

H_0：直径の平均は 13 に等しい

H_1：直径の平均は 13 に等しくない

標本の大きさ 80 は大きいから，統計量

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{U^2/n}}$$

は近似的に標準正規分布に従うと考えてよい．

逆正規分布表より，有意水準5％の棄却域は

$$Z < -1.9600 \quad \text{または} \quad 1.9600 < Z$$

Z の実現値 z は

$$z = \frac{12.975 - 13}{\sqrt{0.11^2/80}} = -2.0328$$

この値は棄却域に入るから，帰無仮説 H_0 は棄却される．したがって，直径の平均は 13 とはいえない．　//

224 例題の標本平均，不偏分散が標本の大きさ 12 の場合の結果であるとする．このとき，スチールボールの直径の平均は 13 であるといってよいか．正規母集団を仮定して，有意水準5％で検定せよ．

9——等分散の検定

2つの異なる正規母集団 $N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ から，それぞれ大きさ n_1, n_2 の標本を独立に無作為抽出する．仮説

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

が正しいと仮定すると，統計量

$$F = \frac{U_1^2}{U_2^2},\ F' = \frac{U_2^2}{U_1^2}$$

はそれぞれ自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$, $(n_2 - 1, n_1 - 1)$ の F 分布に従う．このことを用いて検定を行う．

例題 ある肥料の効果を調べるために，同一条件とみられる 11 地区に対して，5 地区は肥料を使用し，6 地区は肥料を使用しないで収穫量を測ったところ，それぞれの平均は 45.37, 41.25，不偏分散は 5.43, 4.83 であった．収穫量は正規分布 $N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ に従うとし，有意水準を5％として $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を検定せよ．

解 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ とおく．

H_0 が正しいとすると，$F = \dfrac{U_1^2}{U_2^2}$ は自由度 (4, 5) の F 分布に従う．

F の実現値 f は　$f = \dfrac{5.43}{4.83} = 1.124$

アプリを用いて p 値を求めると　$p = 2 \times P(F \geqq 1.124) = 0.8786 > 0.05$

または，逆 F 分布表を用いると，$F_{4,5}(0.025) = 7.388$ だから

$$P(F \geqq 7.388) = 0.025$$

したがって　$p = 2 \times P(F \geqq 1.124) > 2 \times P(F \geqq 7.388) = 0.05$

よって，H_0 は受容される．　//

225 2つの異なる正規母集団 A : $N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，B : $N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ についてそれぞれ大きさ 10, 12 の無作為標本をとり，母分散が等しいかどうか調べることにした．A，B の不偏分散 U_1^2, U_2^2 の実現値が $u_1^2 = 3.26, u_2^2 = 12.29$ であったとき，仮説 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を有意水準 5% で検定せよ．

10——分散分析法

3羽の鳥 A, B, C がある単位期間に産む卵の個数を計測したところ，右の表のようになった．この表をもとに，3羽の鳥の産む卵の個数に差があるかどうかを検定するために，全体の誤差と列内および列間における差に着目して分析する方法がある．これを**分散分析**

A	B	C
10	15	8
8	14	9
11	19	13
14	18	6
12	15	
5		

4 推定と検定

という．

一般に，列の数を k，全体のデータ数を N，各列のデータ数を $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$ とおく．上の例では

$$k=3,\ N=15,\ n_1=6,\ n_2=5,\ n_3=4$$

である．さらに，全データの平均を M，各列の平均を $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k$ とおく．

i 番目の列のデータを $x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{in_i}$，平均を m_i とするとき

$$\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-m_i)^2=(n_i-1)u_i^2 \quad (u_i^2 \text{ は不偏分散}) \tag{1}$$

をその列の偏差平方和という．また，すべての列の偏差平方和の和を誤差変動といい，S_E で表す．S_E は列内の偶然的なばらつきを表すといってよい．

S_E に対して

$$S_A=\sum_{i=1}^{k}n_i(m_i-M)^2 \tag{2}$$

を列間変動という．S_A は，各列のデータがすべて平均 m_i であるとしたときの偏差平方和であり，列間のばらつきを表すと考えられる．また，全体の偏差平方和を S_T とすると

$$S_T=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-M)^2\right)=(N-1)u^2 \quad (u^2 \text{は全データの不偏分散})$$

であり，$S_T=S_A+S_E$ が成り立つ．

このとき，母集団についていくつかの仮定のもとに

$$F=\frac{S_A/(k-1)}{S_E/(N-k)} \tag{3}$$

は自由度 $(k-1,\ N-k)$ の F 分布に従うことが知られている．(3) の F を検定統計量として，右側検定を行えばよい．

例題 上の例について，3 羽の鳥の産む卵の個数に差があるといえるかどうかを有意水準 5％ で検定せよ．

解 帰無仮説 H_0，対立仮説 H_1 を次のようにおく．

H_0 : A, B, C の 3 羽に差はない

H_1 : A, B, C の 3 羽に差がある

全データの平均 M と各列の平均 $m_1,\ m_2,\ m_3$ は

$$M=11.8,\ m_1=10.0,\ m_2=16.2,\ m_3=9.0$$

また，各列の不偏分散は

10.000，4.700，8.667

したがって

$$S_E=5\times10.000+4\times4.700+3\times8.667=94.80$$

$$S_A=6(10.0-11.8)^2+5(16.2-11.8)^2+4(9.0-11.8)^2=147.6$$

実現値は

$$f=\frac{S_A/(3-1)}{S_E/(15-3)}=9.34$$

まとめると右の表が得られる．

	平方和	自由度	不偏分散	分散比
S_A	147.6	2	73.8	9.34
S_E	94.8	12	7.9	
S_T	242.4	14		

自由度 (2, 12) の F 分布より，アプリを用いて p 値を求めると

$$p=P(F\geqq9.34)=0.0036<0.05$$

したがって，H_0 は棄却され，A, B, C の産む卵の個数に差があるといえる．//

●**注**…解答の表を**分散分析表**という．

226 $S_T=S_A+S_E$ を証明せよ．

227 右の表は，A, B, C の 3 人が数学の試験を受けた結果である．3 人に数学の学力差があるといえるか．有意水準 5％ で検定せよ．

A	B	C
67	52	58
58	46	65
65	58	73
72	63	

11―いろいろな問題

228 母平均 μ の母集団から大きさ n の標本 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ を抽出するとき，次の問いに答えよ．

(1) 標本平均 $\overline{X}$ は母平均 μ の不偏推定量であることを証明せよ．

(2) 不偏分散 U^2 は母分散 σ^2 の不偏推定量であることを証明せよ．

(1) $E[\overline{X}]$ を求めよ．

(2) $X_i-\overline{X}$ $=(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)$ の変形を用いよ．

229 外見が同じ 2 つの袋 A, B があり，A には白球 4 個と黒球 1 個，B には白球 2 個と黒球 3 個が入っている．一方の袋を無作為に選び，復元抽出で 3 回取り出すとき，白球が 2 回以上出れば，選んだ袋は A であると判定する．帰無仮説を「H_0 : 選んだ袋は A である」としたとき，第 1 種の誤りと第 2 種の誤りを犯すのはどんな場合か．また，それぞれの誤りを犯す確率を求めよ．

λ についての 2 次方程式の判別式は

$$\frac{D}{4}=\sigma_{xy}{}^2-\sigma_x{}^2\sigma_y{}^2\leqq 0 \text{ だから}$$

$$\frac{\sigma_{xy}{}^2}{\sigma_x{}^2\sigma_y{}^2}\leqq 1 \qquad \therefore\quad \rho_{xy}{}^2\leqq 1$$

よって $-1\leqq\rho_{xy}\leqq 1$

Plus

1　多次元確率変数

173

x \ y	1	2	3	$P(X=x)$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{5}$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

174 例題の X と Y は互いに独立である.

問題 173 の X と Y は互いに独立でない.

175 (1) $c=6$

(2) $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(1+x)^3} & (x\geqq 0 \text{ のとき})\\ 0 & (x<0 \text{ のとき})\end{cases}$

176 $f_1(x)=e^{-x}$, $f_2(y)=e^{-y}$ より

$$f_1(x)f_2(y)=f(x,\ y)$$

よって, 互いに独立である.

2　歪度と尖度

177 $I_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\,dx$ とおく. $f(x)$ が偶関数であることを利用せよ.

$I_1=0$, $I_2=\frac{2}{3}$, $I_3=0$, $I_4=\frac{16}{15}$ より

歪度 $\frac{I_3}{\sigma^3}=0$　尖度 $\frac{I_4}{\sigma^4}=\frac{12}{5}$

3　モーメント母関数（積率母関数）

178 (1) $M(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{tk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$

$$=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}$$

(2) $M'(t)=\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$

$$M''(t)=\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}+\lambda^2e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$E[X]=M'(0)=\lambda$$

$$E[X^2]=M''(0)=\lambda+\lambda^2$$

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$$

179 モーメント母関数 $M(t)$ は, $|t|<1$ のとき

$$M(t)=\int_0^{\infty}e^{tx}e^{-x}\,dx=\int_0^{\infty}e^{(t-1)x}\,dx$$

$$=\frac{1}{t-1}\Big[e^{(t-1)x}\Big]_0^{\infty}=\frac{1}{1-t}$$

$$=1+t+t^2+\cdots+t^n+\cdots$$

これが $M(t)$ のマクローリン展開になっているから

$$\frac{\mu_k}{k!}=1 \qquad \therefore\quad \mu_k=k!$$

4　補章関連

180 $E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_0^{\infty}\lambda xe^{-\lambda x}\,dx$

$$=\lambda\left\{\left[x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)dx\right\}$$

$$=\lambda\left\{0+\frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}\right\}=\frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2]=\int_0^{\infty}\lambda x^2e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=\lambda\left\{\left[x^2\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}2x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)dx\right\}$$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty}\lambda xe^{-\lambda x}\,dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

181 3.388

5　いろいろな問題

182 (1) $P(X=0)=e^{-0.2}=0.8187$

(2) $P(X=4)=e^{-0.2}\cdot\frac{0.2^4}{4!}=0.0000546$

(3) $\left\{P(X=0)\right\}^5=\left(e^{-0.2}\right)^5=0.3679$

(4) ${}_3\mathrm{C}_1\,e^{-0.2}\cdot 0.2\cdot(e^{-0.2})^2=0.3293$

183 $E[X]=\frac{7}{3}$, $E[X^2]=6$, $V[X]=\frac{5}{9}$ より

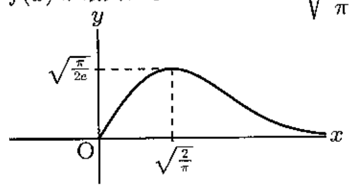
$$\sqrt{V[X]}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

184 (1) $P(X\leqq 1)=\int_0^1\frac{\pi}{2}x\,e^{-\frac{\pi}{4}x^2}\,dx$

$$=\Big[-e^{-\frac{\pi}{4}x^2}\Big]_0^1=1-e^{-\frac{\pi}{4}}$$

(2) $f'(x)=\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{4}x^2}\left(1-\frac{\pi}{2}x^2\right)$

$f(x)$ が最大になる x は　$x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$



(3) 分布関数 $F(x)$ は $x\geqq 0$ のとき

$$F(x)=1-e^{-\frac{\pi}{4}x^2}$$

$F(x)=\frac{2}{3}$ より　$x=\sqrt{\frac{4}{\pi}\log 3}$

4章　推定と検定

1　母数の推定

Basic

185 5.38

186 $u^2=0.02788$

187 $18.02\leqq\mu\leqq 23.02$

188 $9.86\leqq\mu\leqq 11.14$

189 $6.25\leqq\mu\leqq 6.63$

190 標本比率の平均 0.65　標準偏差 0.0275

確率 0.0344

191 $0.01\leqq p\leqq 0.04$

192 $0.504\leqq p\leqq 0.616$

193 4269 以上

Check

194 $164.1\leqq\mu\leqq 170.7$　⇨187

195 $2.53\leqq\mu\leqq 4.67$　⇨188

196 $47.2\leqq\mu\leqq 57.4$　⇨189

197 標本比率の平均 0.75　標準偏差 0.0194

確率 0.1515　⇨190

198 $0.015\leqq p\leqq 0.045$　⇨191,192

199 1537 人以上　⇨193

Step up

200 $\sigma=15$, $\alpha=0.05$ より

$$2\cdot\frac{15}{\sqrt{n}}\cdot 1.960\leqq 2$$

$n\geqq 864.4$　　$\therefore$ 865 人以上

201 $\sigma=10$, $\alpha=0.01$ より

$$2\cdot\frac{10}{\sqrt{n}}\cdot 2.576\leqq 4$$

$n\geqq 165.89$　　$\therefore$ 166 人以上

2　仮説検定

Basic

202 (1) $\mathrm{H}_0: p=\frac{1}{6}$, $\mathrm{H}_1: p>\frac{1}{6}$

(2) 5 回のうち 3 回以上 1 の目が出る確率は

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{6}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\frac{5}{6}+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$=0.03549$$

H_0 は棄却され, p は $\frac{1}{6}$ より大きいといえる.

203 $\mathrm{H}_0: \mu=116.2$, $\mathrm{H}_1: \mu\neq 116.2$

$t=1.743$

自由度 9 の t 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = 2 \times P(T \geqq 1.743) = 0.1154 > 0.05$

または，t 分布表を用いると

$P(T \geqq 1.7) = 0.0617$，$P(T \geqq 1.8) = 0.0527$

したがって　$p > 2 \times 0.0527 > 0.05$

H_0 は受容され，異なるとはいえない.

204 $H_0 : \mu = 350$，$H_1 : \mu < 350$

$t = -1.688$

自由度 14 の t 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = P(T \leqq -1.688) = P(T \geqq 1.688)$

$= 0.0568 > 0.05$

または，t 分布表を用いると

$P(T \geqq 1.6) = 0.0660$，$P(T \geqq 1.7) = 0.0556$

したがって　$p > 0.0556 > 0.05$

H_0 は受容され，少なくなったとはいえない.

205 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$d = 10.23$，$t = -1.92$

自由度 10.23 の t 分布に従うとして，アプリを用いて p 値を求めると

$p = 2 \times P(T \leqq -1.92) = 2 \times P(T \geqq 1.92)$

$= 0.0832 > 0.05$

または，自由度 10 として t 分布表を用いると

$P(T \geqq 1.9) = 0.0433$，$P(T \geqq 2.0) = 0.0367$

したがって　$p > 2 \times 0.0367 > 0.05$

H_0 は受容され，有意ではない.

206 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$d = 18.01$，$t = -2.38$

自由度 18.01 の t 分布に従うとして，アプリを用いて p 値を求めると

$p = 2 \times P(T \leqq -2.38) = 2 \times P(T \geqq 2.38)$

$= 0.0286 < 0.05$

または，自由度 18 として t 分布表を用いると

$P(T \geqq 2.3) = 0.0168$，$P(T \geqq 2.4) = 0.0137$

したがって　$p < 2 \times 0.0168 < 0.05$

H_0 は棄却され，差があるといえる.

207 $H_0 : p = 0.03$，$H_1 : p > 0.03$

$z = 1.17$

アプリまたは正規分布表を用いて，p 値を求めると

$p = P(Z \geqq 1.17) = 0.1210 > 0.05$

H_0 は受容され，高くなったとはいえない.

208 $H_0 : p = \dfrac{1}{6}$，$H_1 : p \neq \dfrac{1}{6}$

$z = 1.53$

アプリまたは正規分布表を用いて，p 値を求めると

$p = 2 \times P(Z \geqq 1.53) = 0.126 > 0.05$

H_0 は受容され，$\dfrac{1}{6}$ でないとはいえない.

Check

209 $H_0 : \mu = 70$，$H_1 : \mu \neq 70$

$t = 2.191$

自由度 4 の t 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = 2 \times P(T \geqq 2.191) = 0.0936 > 0.05$

または，t 分布表を用いると

$P(T \geqq 2.1) = 0.0518$，$P(T \geqq 2.2) = 0.0463$

したがって　$p > 2 \times 0.0463 > 0.05$

H_0 は受容され，影響を与えるとはいえない.

⇨203,204

210 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$d = 15.90$，$t = 1.85$

自由度 15.90 の t 分布に従うとして，アプリを用いて p 値を求めると

$p = 2 \times P(T \geqq 1.85) = 0.0830 > 0.05$

または，自由度 15 として t 分布表を用いると

$P(T \geqq 1.8) = 0.0460$，$P(T \geqq 1.9) = 0.0384$

したがって　$p > 2 \times 0.0384 > 0.05$

H_0 は受容され，差があるとはいえない.　⇨205,206

211 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

$d = 9.41$，$t = -2.44$

自由度 9.41 の t 分布に従うとして，アプリを用いて p 値を求めると

$p = P(T \leqq -2.44) = P(T \geqq 2.44)$

$= 0.0181 < 0.05$

または，自由度 9 として t 分布表を用いると

$P(T \geqq 2.4) = 0.0199$，$P(T \geqq 2.5) = 0.0169$

したがって　$p < 0.0199 < 0.05$

H_0 は棄却され，高くなっているといえる.

⇨205,206

212 $H_0 : p = 0.8$，$H_1 : p > 0.8$

$z = 1.44$

アプリまたは正規分布表を用いて，p 値を求めると

$p = P(Z \geqq 1.44) = 0.0749 > 0.01$

H_0 は受容され，従来のものより効果があるとはいえない.　⇨207,208

Step up

213 $H_0 : p = \dfrac{1}{3}$ を仮定すると

$P(X \leqq 2) = 0.018$，$P(X \leqq 3) = 0.060$

であるから，H_0 は $X \leqq 2$ のときに棄却される．よって検出力は $p = \dfrac{1}{10}$ と仮定したときの $P(X \leqq 2)$ の値，すなわち

$P(X \leqq 2) = 0.68$

X の実現値が 4 のとき，H_0 は棄却されず，1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$ より小さいとはいえない.

214 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$，$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

T は自由度 11 の t 分布に従う.

実現値は

$$u^2 = \frac{5 \times 3.5 + 6 \times 4.2}{11} = 3.882$$

$$t = \frac{127 - 130}{\sqrt{u^2(1/6 + 1/7)}} = -2.74$$

アプリを用いて p 値を求めると

$p = P(T \leqq -2.74) = P(T \geqq 2.74)$

$= 0.0096 < 0.05$

または，t 分布表を用いると

$P(T \geqq 2.7) = 0.0103$，$P(T \geqq 2.8) = 0.0086$

したがって　$p < 0.0103 < 0.05$

H_0 は棄却され，血圧は上昇するといえる.

Plus

1　母平均の区間推定（母分散が既知の場合）

215 $165.4 \leqq \mu \leqq 170.8$

2　母分散の区間推定

216 $0.0219 \leqq \sigma^2 \leqq 0.2078$

3　母平均の検定（母分散が既知または標本が大きい場合）

217 $H_0 : \mu = 1500$，$H_1 : \mu > 1500$

$z = 2.00$

アプリまたは正規分布表を用いて，p 値を求めると

$p = P(Z \geqq 2.00) = 0.0228 < 0.05$

H_0 は棄却され，改良されたといえる.

218 $H_0 : \mu = 159.4$，$H_1 : \mu > 159.4$

$z = 1.54$

アプリまたは正規分布表を用いて，p 値を求めると

$p = P(Z \geqq 1.54) = 0.0618 > 0.05$

H_0 は受容され，高くなったとはいえない.

4　母分散の検定

219 $H_0 : \sigma^2 = 10$，$H_1 : \sigma^2 \neq 10$

$x = 22.49$

自由度 9 の χ^2 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = 2 \times P(X \geqq 22.49) = 0.0148 < 0.05$

または，χ^2 分布表を用いると

$P(X \geqq 22) = 0.0089,\ P(X \geqq 23) = 0.0062$

したがって　$p < 2 \times 0.0089 < 0.05$

H_0 は棄却され，10 でないといえる．

5　母平均の差の検定（標本が大きい場合）

220 $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2,\quad \mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$z = 2.80$

アプリまたは正規分布表を用いて，p 値を求めると

$p = 2 \times P(Z \geqq 2.80) = 0.0052 < 0.05$

H_0 は棄却され，差があるといえる．

6　適合度の検定

221 H_0: 母集団比率は 9 : 3 : 3 : 1 である

H_1: 母集団比率は 9 : 3 : 3 : 1 でない

	黄/丸	黄/しわ	緑/丸	緑/しわ	計
p_i	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1
期待度数	312.75	104.25	104.25	34.75	556
観測度数	319	97	112	28	556

実現値は

$$x = \frac{(319-312.75)^2}{312.75} + \frac{(97-104.25)^2}{104.25} + \frac{(112-104.25)^2}{104.25} + \frac{(28-34.75)^2}{34.75}$$

$$= 2.5164$$

自由度 3 の χ^2 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = P(X \geqq 2.5164) = 0.4723 > 0.05$

または，χ^2 分布表を用いると

$P(X \geqq 2) = 0.5724,\ P(X \geqq 3) = 0.3916$

したがって　$p > 0.3916 > 0.05$

H_0 は受容され，理論上の比率 9 : 3 : 3 : 1 に適合していると考えられる．

222 $\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2},\quad \mathrm{H}_1 : p \neq \frac{1}{2}$

	表・表	表・裏	裏・裏	計
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
期待度数	25	50	25	100
観測度数	32	47	21	100

実現値は

$$x = \frac{(32-25)^2}{25} + \frac{(21-25)^2}{25} + \frac{(47-50)^2}{50}$$

$$= 2.78$$

自由度 2 の χ^2 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = P(X \geqq 2.78) = 0.2491 > 0.05$

または，χ^2 分布表を用いると

$P(X \geqq 2) = 0.3679,\ P(X \geqq 3) = 0.2231$

したがって　$p > 0.2231 > 0.05$

H_0 は受容され，等しいと考えられる．

7　独立性の検定

223 H_0 : クラスによる違いはない

H_1 : クラスにより異なる

	A	B	C	計
合格	37.33	37.33	37.33	112
不合格	10.67	10.67	10.67	32
計	48	48	48	144

実現値は

$$x = \frac{(38-37.33)^2}{37.33} + \frac{(32-37.33)^2}{37.33} + \frac{(42-37.33)^2}{37.33} + \frac{(10-10.67)^2}{10.67} + \frac{(16-10.67)^2}{10.67} + \frac{(6-10.67)^2}{10.67}$$

$$= 6.11$$

自由度 2 の χ^2 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = P(X \geqq 6.11) = 0.0471 < 0.05$

または，χ^2 分布表を用いると

$P(X \geqq 6) = 0.0498,\ P(X \geqq 7) = 0.0302$

したがって　$p < 0.0498 < 0.05$

H_0 は棄却され，合否に違いがあるといえる．

8　棄却域による検定

224 H_0 : 直径の平均は 13 に等しい

H_1 : 直径の平均は 13 に等しくない

統計量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{U^2/n}}$$

は自由度 11 の t 分布に従う．

逆 t 分布表より，有意水準 5% の棄却域は

$T < -2.201$　または　$2.201 < T$

T の実現値 t は

$$t = \frac{12.975 - 13}{\sqrt{0.11^2/12}} = -0.7873$$

この値は棄却域に入らないから，H_0 は受容される．

したがって，直径の平均は 13 といってよい．

9　等分散の検定

225 $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\quad \mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$u_1{}^2 = 3.26,\ u_2{}^2 = 12.29,\ f' = 3.77$

自由度 (11, 9) の F 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = 2 \times P(F' \geqq 3.77) = 0.056 > 0.05$

または，逆 F 分布表を用いると

$F_{11,9}(0.025) = 3.912$ だから

$P(F' \geqq 3.912) = 0.025$

したがって

$p = 2 \times P(F' \geqq 3.77)$

$\quad > 2 \times P(F' \geqq 3.912) = 0.05$

H_0 は受容され，母分散が異なるとはいえない．

10　分散分析法

226 $m_i = \dfrac{1}{n_i}\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij},\ M = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ より

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = n_i m_i,\ \sum_{i=1}^{k} n_i m_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = NM$$

これより

$$S_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}{}^2 - 2x_{ij}M + M^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}{}^2 - NM^2$$

$$S_A + S_E = \sum_{i=1}^{k} n_i(m_i - M)^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - m_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i(m_i{}^2 - 2m_i M + M^2) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}{}^2 - 2x_{ij}m_i + m_i{}^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i m_i{}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} n_i m_i M + NM^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}{}^2 - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}m_i + \sum_{i=1}^{k} n_i m_i{}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} n_i m_i{}^2 - 2NM^2 + NM^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}{}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} n_i m_i{}^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i m_i{}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}{}^2 - NM^2$$

$\therefore\quad S_T = S_A + S_E$

227 H_0 : 学力に差はない，H_1 : 学力に差はある

実現値は　$f = 3.08$

自由度 (2, 8) の F 分布に従うことから

アプリを用いて p 値を求めると

$p = P(F \geqq 3.08) = 0.1019 > 0.05$

H_0 は棄却されず，学力に差があるとはいえない．

	平方和	自由度	不偏分散	分散比
S_A	290.3	2	145.2	3.08
S_E	376.4	8	47.1	
S_T	666.7	10		

11 いろいろな問題

228 (1) $E[\overline{X}] = \dfrac{1}{n}(E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n])$

$$= \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$$

(2) $E[U^2] = E\left[\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left\{(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)\right\}^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left\{(X_i-\mu)^2 - 2(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)+(\overline{X}-\mu)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n(\overline{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i-\mu)^2\right] - n\cdot\frac{\sigma^2}{n}\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2) = \sigma^2$$

229 第 1 種の誤りを犯すのは，A の袋を選んで，白球が 2 回以上出ない場合で，その確率は

$${}_3C_1\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{13}{125}$$

第 2 種の誤りを犯すのは，B の袋を選んで，白球が 2 回以上出る場合で，その確率は

$${}_3C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{44}{125}$$