71 xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$x(t) = a\cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = -a\sin t$$

ここで a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．次の問いに答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ．

(2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ．

(4) 曲線 C を zx 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ．

（東北大）

72 直交座標系において，x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\boldsymbol{i} - 2xye^{-x^2-y^2}\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\nabla \times \boldsymbol{a}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a} = \nabla\varphi$ となるようなスカラー関数 φ は存在するか否かを答えよ．存在する場合は，φ を求めよ．ただし，原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ において $\varphi = 0$ とする．

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で与えられる曲線 C 上で，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ．　（九州大）

73 原点を中心とした半径 $r\ (r \fallingdotseq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて

$$\boldsymbol{r}(=\boldsymbol{r}(u, v)) = r\boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\,\boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\,\boldsymbol{i}_y + r\sin v\,\boldsymbol{i}_z$$
$$\left(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を $r, \boldsymbol{i}_r, v$ で表せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分

$$\int_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．（大阪大）

2章 ラプラス変換

1 ラプラス変換の定義と性質

まとめ

● **定義**

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

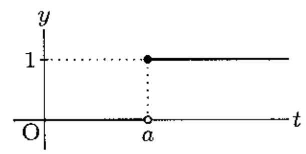
● **いろいろな関数のラプラス変換**

原関数	像関数
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{s-\alpha}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

原関数	像関数
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$

● **単位ステップ関数**

$$U(t-a) = \begin{cases} 1 & (t \geqq a) \\ 0 & (t < a) \end{cases} \qquad \mathcal{L}[U(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}\quad (a \geqq 0)$$



● **ラプラス変換の線形性，相似性，移動法則**

原関数	像関数
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$
$f(at)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)\quad (a > 0)$
$e^{\alpha t}f(t)$	$F(s-\alpha)$
$f(t-\mu)\,U(t-\mu)$	$e^{-\mu s}F(s)\quad (\mu > 0)$

● **微分法則と積分法則**

原関数	像関数
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-f(0)\,s-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-f(0)\,s^{n-1}-f'(0)\,s^{n-2}$ $-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^{\infty}F(\sigma)\,d\sigma$

Basic

74 $f(t)=t^3$ のラプラス変換を求めよ． → 教 p.47 問·1

75 ラプラス変換の線形性を用いて，$\mathcal{L}[3t^2+2]$ を求めよ． → 教 p.48 問·2

76 $\mathcal{L}[e^t-e^{-2t}]$ を求めよ． → 教 p.48 問·3

77 定義に従って，$f(t)=\sin 3t$ のラプラス変換を求めよ． → 教 p.49 問·4

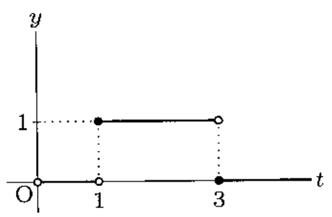
78 $f(t)=\cosh 2t$ のラプラス変換を求めよ． → 教 p.49 問·5

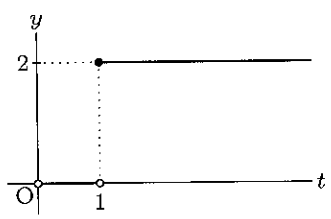
79 次の関数のグラフをかけ．また，そのラプラス変換を求めよ． → 教 p.49 問·6

(1) $y=U(t-3)$　　(2) $y=3\,U(t-2)$

80 次の関数 $f(t)$ を単位ステップ関数を用いて表せ．また，$\mathcal{L}[f(t)]$ を求めよ． → 教 p.50 問·7

(1) $f(t)=\begin{cases}1 & (1\leqq t<3)\\ 0 & (0<t<1,\ t\geqq 3)\end{cases}$　　(2) $f(t)=\begin{cases}2 & (t\geqq 1)\\ 0 & (0<t<1)\end{cases}$





81 $\mathcal{L}[\cosh t]=\dfrac{s}{s^2-1}$ を用いて，$\mathcal{L}[\cosh\omega t]$ を求めよ．ただし，ω は 0 でない定数とする． → 教 p.51 問·8

82 2 倍角の公式 $\sin 2t=2\sin t\cos t$ を用いて，$\mathcal{L}[\sin t\cos t]$ を求めよ． → 教 p.51 問·9

83 $\mathcal{L}[t^3e^{2t}]$ を求めよ． → 教 p.52 問·10

84 $\mathcal{L}\left[\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)U\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$ を求めよ． → 教 p.52 問·11

85 関数 $f(t)=(t-1)\,U(t-1)$ のグラフをかけ．また，$\mathcal{L}[f(t)]$ を求めよ． → 教 p.52 問·12

86 $\mathcal{L}[t\sinh t]$，$\mathcal{L}[t\cosh t]$ を求めよ． → 教 p.54 問·13

87 関数 $f(t)$ が $f'(t)+4f(t)=t^2$，$f(0)=0$ を満たすとき，原関数の微分法則を用いて，$\mathcal{L}[f(t)]$ を求めよ． → 教 p.54 問·14

88 像関数の高次微分法則を用いて，$\mathcal{L}[t^ne^{3t}]$ を求めよ．ただし，n は正の整数とする． → 教 p.55 問·15

89 $\mathcal{L}\left[\dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{t}\right]$ を求めよ． → 教 p.56 問·16

90 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ． → 教 p.59 問·17

(1) $\dfrac{1}{s^2+4s+4}$　　(2) $\dfrac{1}{s^2-4s+3}$　　(3) $\dfrac{1}{s^2-6s+10}$

91 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ． → 教 p.59 問·18

(1) $\dfrac{s+1}{s^2+6s+9}$　　(2) $\dfrac{s}{s^2-4s+13}$

92 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ． → 教 p.60 問·19

(1) $\dfrac{2s^2-5s-6}{(s+2)(s-1)(s-2)}$　　(2) $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

Check

93 次の関数のラプラス変換を求めよ．

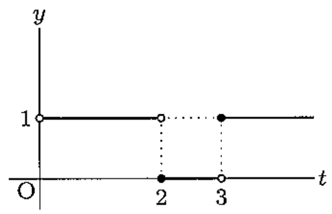
(1) $4t^2-3t+2$　(2) $(t-1)^3$　(3) $4e^{3t}-3e^{2t}$　(4) e^{3t+2}

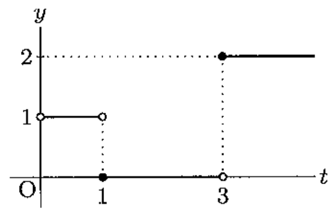
94 定義に従って，関数 $te^{\alpha t}$ のラプラス変換を求めよ．ただし，α は定数とする．

95 $\mathcal{L}[\sinh\omega t]$ を求めよ．ただし，ω は 0 でない定数とする．

96 次の関数 $f(t)$ を単位ステップ関数を用いて表せ．また，$\mathcal{L}[f(t)]$ を求めよ．

(1) $f(t)=\begin{cases}1 & (0<t<2,\ t\geqq 3)\\ 0 & (2\leqq t<3)\end{cases}$　(2) $f(t)=\begin{cases}1 & (0<t<1)\\ 0 & (1\leqq t<3)\\ 2 & (t\geqq 3)\end{cases}$





97 次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) te^{3t}　(2) t^2e^{-2t}　(3) $e^{2t}\sin 3t$　(4) $e^{-t}\cos 2t$

98 関数 $f(t)=(t-2)^2U(t-2)$ のグラフをかけ．また，$\mathcal{L}[f(t)]$ を求めよ．

99 像関数の微分法則を用いて，$\mathcal{L}[t\sinh\omega t]$，$\mathcal{L}[t\cosh\omega t]$ を求めよ．ただし，ω は 0 でない定数とする．

100 関数 $f(t)$ が $f'(t)+3f(t)=\sin t$，$f(0)=1$ を満たすとき，原関数の微分法則を用いて，$\mathcal{L}[f(t)]$ を求めよ．

101 像関数の高次微分法則を用いて，$\mathcal{L}[t^2\cos t]$ を求めよ．

102 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{(s-2)^4}$　(2) $\dfrac{s+2}{s^2-2s+1}$　(3) $\dfrac{s}{s^2-s-6}$

(4) $\dfrac{2s+3}{s^2+4}$　(5) $\dfrac{2s+1}{s^2+2s+5}$

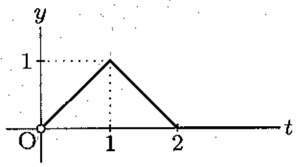
103 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{s-5}{(s+1)(s-2)(s-3)}$　(2) $\dfrac{2s^2+7}{(s-2)^2(s+3)}$

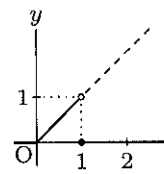
Step up

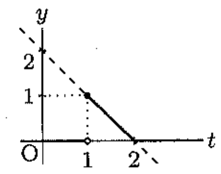
例題 次の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ．

$$f(t)=\begin{cases}t & (0<t<1)\\ 2-t & (1\leqq t<2)\\ 0 & (t\geqq 2)\end{cases}$$



解 下の左図は関数 $y=t(U(t)-U(t-1))$ で表される．また，右図は関数 $y=(2-t)(U(t-1)-U(t-2))$ で表される．



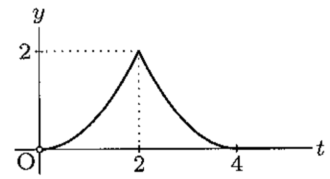


よって

$$f(t)=t(U(t)-U(t-1))+(2-t)(U(t-1)-U(t-2))$$
$$=tU(t)-2(t-1)U(t-1)+(t-2)U(t-2)\quad (t>0)$$
$$\therefore\quad \mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{s^2}-\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2}=\frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}$$ //

104 次の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ．

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2 & (0<t<2)\\ \dfrac{1}{2}(t-4)^2 & (2\leqq t<4)\\ 0 & (t\geqq 4)\end{cases}$$



例題 $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$ の逆ラプラス変換を求めよ．ただし，ω は正の定数とする．

解

$$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}=\frac{1}{2\omega^2}\frac{(s^2+\omega^2)-(s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}$$
$$=\frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right)$$

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}-\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t-t\cos\omega t\right)=\frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$$ //

105 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$　(2) $\dfrac{s^3-s^2+12s-18}{(s^2+9)^2}$

2 ラプラス変換の応用

まとめ

● 微分方程式への応用

微分方程式と初期条件 $\xrightarrow{\text{ラプラス変換}}$ 代数方程式
↓
求める解 $\xleftarrow{\text{逆ラプラス変換}}$ 代数方程式の解

● たたみこみ $f*g$

○ $(f*g)(t)=f(t)*g(t)=\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

○ $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$

○ $\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=\mathcal{L}[f(t)]\,\mathcal{L}[g(t)]$

● 線形システム

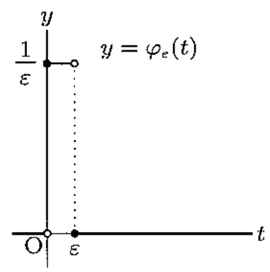
○ $y''+ay'+by=x(t),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$ 　($a,\ b$ は定数)
において，入力 $x(t)$ から出力 $y(t)$ への対応を線形システムという.

○ $H(s)=\dfrac{1}{s^2+as+b}$ を伝達関数といい，$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ として

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_0^t h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

● デルタ関数

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi_\varepsilon(t)$$



○ $\mathcal{L}[\delta(t)]=1$

○ $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t)\,dt=1$

○ $t>0$ のとき 　$\delta(t)=0$

○ $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$

○ $h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+as+b}\right]$ は微分方程式
$y''+ay'+by=\delta(t),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$
の解である.

Basic

106 次の微分方程式を解け. →教p.63 問·1

(1) $\dfrac{dx}{dt}-x=e^{2t},\ x(0)=1$ 　(2) $\dfrac{dx}{dt}+x=1,\ x(0)=0$

107 次の微分方程式を解け. →教p.63 問·2

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dx}{dt}-2x=e^t$ 　($t=0$ のとき $x=0,\ \dfrac{dx}{dt}=0$)

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+5x=0$ 　($t=0$ のとき $x=0,\ \dfrac{dx}{dt}=1$)

108 次の微分方程式を解け. →教p.64 問·3

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}=0,\ x(0)=1,\ x(1)=e^2$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+9x=3,\ x(0)=1,\ x\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

109 次の微分方程式の一般解を求めよ. →教p.65 問·4

(1) $\dfrac{dx}{dt}+4x=1$ 　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-9x=0$ 　(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+16x=t$

110 関数 $t^3,\ t$ のたたみこみ t^3*t を求めよ. →教p.66 問·5

111 たたみこみ $t*(t^3+t^4)$ を求めよ. →教p.66 問·6

112 $\mathcal{L}[t^3*t]$ を求めよ．また，問題 110 の結果から直接 $\mathcal{L}[t^3*t]$ を求めよ. →教p.66 問·7

113 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ のとき，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ. →教p.67 問·8

(1) $\dfrac{F(s)}{s^2+4s+4}$ 　(2) $\dfrac{F(s)}{s^2-7s+12}$ 　(3) $\dfrac{F(s)}{s^2-4s+13}$

114 次の積分方程式を満たす関数 $x(t)$ を求めよ. →教p.67 問·9

(1) $\displaystyle\int_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau=t^2$ 　(2) $\displaystyle\int_0^t x(\tau)\,e^{2(t-\tau)}\,d\tau=\sin 3t$

115 微分方程式 $y''-4y'+3y=x(t),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$ で表される線形システムの伝達関数を求めよ．また，出力 $y(t)$ を入力 $x(t)$ で表せ. →教p.68 問·10

116 $\mathcal{L}[e^{2t}*\delta(t)]$ を求めよ. →教p.70 問·11

117 次の微分方程式の解を求めよ. →教p.70 問·12

$$y''+2y'+y=\delta(t),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$$

Check

118 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dx}{dt} - x = te^t$ $\quad$ ($t = 0$ のとき $x = 1$)

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = t$ $\quad$ ($t = 0$ のとき $x = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 2$)

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 5\dfrac{dx}{dt} + 6x = e^{3t}$ $\quad$ ($t = 0$ のとき $x = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 5$)

119 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = \cos t$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 初期条件 $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$ を満たす解を求めよ.

(2) 境界条件 $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ を満たす解を求めよ.

(3) 一般解を求めよ.

120 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 初期条件 $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$ を満たす解を求めよ.

(2) 境界条件 $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ を満たす解を求めよ.

(3) 一般解を求めよ.

121 次のたたみこみを求めよ.

(1) $\cos t * \cos t$ $\qquad$ (2) $t * e^{2t}$ $\qquad$ (3) $t^2 * \sin t$

122 次の積分方程式を満たす関数 $x(t)$ を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^t x(t-\tau)\sin 2\tau\, d\tau = t\sin 2t$

(2) $\displaystyle x(t) - 2\int_0^t x(t-\tau)\cos\tau\, d\tau = \sin t$

(3) $\displaystyle x'(t) + 2x(t) + 4\int_0^t x(t-\tau)e^{2\tau}\, d\tau = t^2$, $x(0) = 0$

123 微分方程式 $y'' + 4y = x(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ で表される線形システムの伝達関数を求めよ. また, 出力 $y(t)$ を入力 $x(t)$ を用いて表せ.

124 次の微分方程式の解を求めよ.

$$y'' + y' - 6y = \delta(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Step up

例題 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} = t$ ($t = 0$ のとき $x = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = -2$) を解け.

解 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として, 微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$(s^2X(s) - s + 2) + 2(sX(s) - 1) = \frac{1}{s^2}$$

$$s(s+2)X(s) = \frac{1}{s^2} + s$$

$$X(s) = \frac{1}{s^3(s+2)} + \frac{1}{s+2}$$

右辺の第1項を次のように部分分数分解する.

$$\frac{1}{s^3(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+2}$$

このとき $\quad A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{8}$

$$\therefore\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{8}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^3} + \frac{7}{8}\frac{1}{s+2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 2t + 2t^2 + 7e^{-2t}\right) \qquad //$$

125 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = \cosh t$ $\quad$ ($t = 0$ のとき $x = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 1$)

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 5x = e^t\sin t$ $\quad$ ($t = 0$ のとき $x = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = 1$)

(3) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + x = t^2e^{-t}$

($t = 0$ のとき $x = 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2$)

例題 次の積分方程式を解け.

$$x(t) + \int_0^t x(\tau)\, d\tau = e^{-t}$$

解 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として, 積分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$X(s) + \frac{X(s)}{s} = \frac{1}{s+1}$$

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{s+1-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

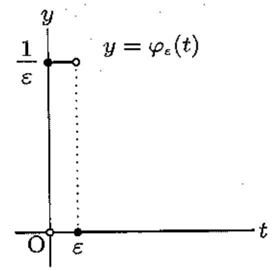
よって $\quad x(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$ $\qquad //$

126 ラプラス変換を用いて, 次の微分方程式を解け. ただし, $x(0) = -1$ とする.

$$\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t) - 3\int_0^t x(\tau)\, d\tau = t$$ (大阪大)

例題 $\varepsilon > 0$ のとき，関数

$$\varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & (0 \leqq t < \varepsilon) \\ 0 & (t < 0,\ t \geqq \varepsilon) \end{cases}$$



について，次の問いに答えよ．

(1) $\varphi_\varepsilon(t)$ のラプラス変換 $\Phi_\varepsilon(s)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \Phi_\varepsilon(s)$ を求めよ．

解 (1) $\varphi_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}(U(t) - U(t-\varepsilon))$ と表されるから　$\Phi_\varepsilon(s) = \dfrac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$

(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \Phi_\varepsilon(s) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-e^{-\varepsilon s}(-s)}{s} = 1$ //

127 例題の $\varphi_\varepsilon(t)$ について，次の微分方程式の解を $y_\varepsilon(t)$ とする．

$$y'' + \omega^2 y = \varphi_\varepsilon(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

このとき，次の問いに答えよ．ただし，ω は正の定数とする．

(1) $y_\varepsilon(t)$ を求めよ．　　(2) $t > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} y_\varepsilon(t)$ を求めよ．

例題 次の関係を同時に満たす関数 $x(t)$，$y(t)$ を求めよ．

$$\frac{dx}{dt} = 4y - 1,\ \frac{dy}{dt} = x + e^t,\ x(0) = 0,\ y(0) = 0$$

解 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ として，微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$sX(s) = 4Y(s) - \frac{1}{s},\ sY(s) = X(s) + \frac{1}{s-1}$$

第1式より　$Y(s) = \dfrac{1}{4}\left(sX(s) + \dfrac{1}{s}\right)$

これを第2式に代入して，$X(s)$ を求めると

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{4}{(s+2)(s-2)(s-1)} - \frac{1}{(s+2)(s-2)} \\ &= \frac{3}{4}\frac{1}{s-2} - \frac{4}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{7}{12}\frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

よって

$$x(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{4}{3}e^t + \frac{7}{12}e^{-2t}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} + 1\right) = \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{1}{3}e^t - \frac{7}{24}e^{-2t} + \frac{1}{4}$$ //

128 次の関係を同時に満たす関数 $x(t)$，$y(t)$ を求めよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y,\ \dfrac{dy}{dt} = -3x,\ x(0) = 2,\ y(0) = 0$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t},\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + e^{2t},\ x(0) = 1,\ y(0) = 1$

例題 関数 $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$ の逆ラプラス変換を求めよ．ただし，ω は正の定数とする．

解 たたみこみのラプラス変換の性質より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\right] \\ &= \frac{1}{\omega}\sin\omega t * \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ &= \frac{1}{\omega^2}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\,\sin\omega\tau\,d\tau \\ &= -\frac{1}{2\omega^2}\int_0^t (\cos\omega t - \cos(\omega t - 2\omega\tau))\,d\tau \\ &= -\frac{1}{2\omega^2}\left[\tau\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}\sin(\omega t - 2\omega\tau)\right]_0^t \\ &= \frac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t) \end{aligned}$$ //

129 たたみこみのラプラス変換の性質を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{s}{(s^2+9)^2}$　　(2) $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$

例題 微分方程式

$$y'' + ay' + by = x(t),\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta$$

の解は

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+as+b}\right],\ k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha(s+a)+\beta}{s^2+as+b}\right]$$

を用いて

$$y(t) = h(t) * x(t) + k(t)$$

と表される．このことを証明せよ．ただし，a，b，α，β は定数とする．

解 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ として，微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$(s^2Y(s) - \alpha s - \beta) + a(sY(s) - \alpha) + bY(s) = X(s)$$

これより

$$Y(s) = \frac{X(s) + \alpha s + \beta + a\alpha}{s^2+as+b} = \frac{X(s)}{s^2+as+b} + \frac{\alpha(s+a)+\beta}{s^2+as+b}$$

よって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = h(t) * x(t) + k(t)$$ //

130 次の微分方程式の解を，$x(t)$，α，β を用いて表せ．

$$y'' - 2y' + 5y = x(t),\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta$$

Plus

1 ―ガンマ関数とラプラス変換

次の式で定義される関数 $\Gamma(p)$ を**ガンマ関数**という．

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx \qquad (p>0)$$

ガンマ関数について，次の性質が証明される．(ただし，n は正の整数)

(1) $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)$

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

(3) $\Gamma(n+1)=n!$

t^α $(\alpha>-1)$ のラプラス変換を求めると

$$\mathcal{L}[t^\alpha]=\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha\,dt=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^\alpha\frac{1}{s}\,dx \qquad (st=x)$$

$$=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\,dx=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

したがって

$$\mathcal{L}[t^\alpha]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

特に，$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]=\mathcal{L}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{s}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

また，$\dfrac{1}{s^\alpha}$ $(\alpha>0)$ の逆ラプラス変換は

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\right]=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

例題 $t\sqrt{t}$ のラプラス変換を求めよ．

解

$$\mathcal{L}\left[t\sqrt{t}\right]=\mathcal{L}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^2\sqrt{s}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^2\sqrt{s}}=\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^2\sqrt{s}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4s^2\sqrt{s}}$$

//

131 次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $t^2\sqrt{t}$　　(2) $\dfrac{t^2+1}{\sqrt{t}}$

132 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{s\sqrt{s}}$　　(2) $\dfrac{1}{s^2\sqrt{s}}$

2 ―周期関数のラプラス変換

$f(t)$ は $t>0$ で定義された周期 T の関数とし，最初の1周期分を取り出した関数を $\varphi(t)$ とすると

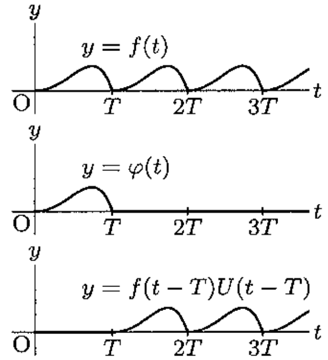
$$f(t)-f(t-T)\,U(t-T)=\varphi(t)$$

両辺のラプラス変換を求めると

$$\mathcal{L}[f(t)]-e^{-Ts}\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[\varphi(t)]$$

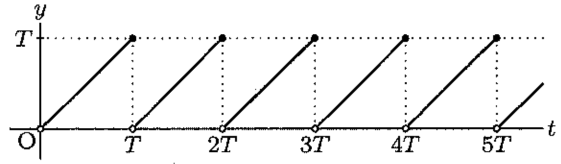
したがって，次の関係式が得られる．

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{\mathcal{L}[\varphi(t)]}{1-e^{-Ts}}$$



例題 次の周期 T の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ．

$$f(t)=t\ (0<t\leqq T),\ f(t+T)=f(t)$$



解 最初の1周期分を取り出した関数を $\varphi(t)$ とすると

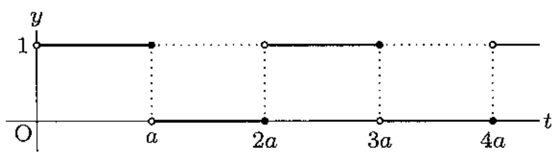
$$\mathcal{L}[\varphi(t)]=\int_0^T e^{-st}t\,dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}t\right]_0^T-\int_0^T\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$=\frac{Te^{-Ts}}{-s}-\left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^T=\frac{1-(1+Ts)e^{-Ts}}{s^2}$$

よって　$\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{\mathcal{L}[\varphi(t)]}{1-e^{-Ts}}=\dfrac{1-(1+Ts)e^{-Ts}}{s^2(1-e^{-Ts})}$　//

133 次の周期 $2a$ の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ．

$$f(t)=\begin{cases}1 & (0<t\leqq a)\\ 0 & (a<t\leqq 2a)\end{cases},\quad f(t+2a)=f(t)$$



134 正の整数 T に対して，$\delta_T(t)=\displaystyle\sum_{n=0}^\infty\delta(t-nT)$ のラプラス変換を求めよ．

●注…$\delta_T(t)$ は周期 T の周期関数である．実際

$$\delta_T(t+T)=\sum_{n=0}^\infty\delta(t+T-nT)=\sum_{n=0}^\infty\delta(t-(n-1)T)=\sum_{n=-1}^\infty\delta(t-nT)$$

$$=\delta(t+T)+\sum_{n=0}^\infty\delta(t-nT)=\delta(t+T)+\delta_T(t)$$

$t>0$ のとき $\delta(t+T)=0$ だから，$\delta_T(t+T)=\delta_T(t)$ が成り立つ．

3—いろいろな問題

135 次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $t^2\sin 2t$　(2) $(t^2\sin 2t)'$　(3) $(t^2\sin 2t)''$

(4) $\displaystyle\int_0^t \tau\sin\tau\,d\tau$　(5) $\displaystyle\int_0^t e^{\tau}\cos\tau\,d\tau$　(6) $\dfrac{\sin 5t}{t}$

136 関数 $F(s)=\dfrac{4s^2+s+12}{(s+1)^2(s^2-2s+2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 次の恒等式が成り立つように定数 A, B, C, D の値を定めよ．

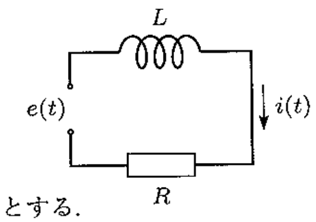
$$\frac{4s^2+s+12}{(s+1)^2(s^2-2s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2-2s+2}$$

(2) 関数 $F(s)$ の逆ラプラス変換を求めよ．

137 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}+3x=U(t-2)$, $x(0)=0$ を解け．

138 図の電気回路に起電力 $e=e(t)$ を与えるとき，電流 $i=i(t)$ について次の微分方程式が成り立つ．（L, R は正の定数）

$$L\frac{di}{dt}+Ri=e$$



このとき，次の問いに答えよ．ただし，$i(0)=0$ とする．

(1) $e(t)=\delta(t)$ のときの電流 i を求めよ．

(2) $e(t)=E$ （定数）のときの電流 i を求めよ．

(3) $e(t)=\sin\omega t$ （ω は定数）のときの電流 i を求めよ．

(3) $\dfrac{1}{(Ls+R)(s^2+\omega^2)}$
$=\dfrac{1}{R^2+\omega^2L^2}\times$
$\left(\dfrac{L^2}{Ls+R}-\dfrac{Ls-R}{s^2+\omega^2}\right)$

139 関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を初期条件 $f(0)=0$, $f'(0)=0$ のもとで，ラプラス変換を用いて解きたい．以下の問いに答えよ．

$$tf''(t)+(3t-1)f'(t)+(2t-3)f(t)=0$$

(1) $f'(t)$, $f''(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $F(s)$ を用いて表せ．

(2) $tf(t)$, $tf'(t)$, $tf''(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $F(s)$ を用いて表せ．

(3) $F(s)$ に関する微分方程式が次のように与えられることを示せ．

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds}+3F(s)=0$$

(4) $F(s)$ に関する微分方程式を解いて，$f(t)$ を求めよ．（東北大改）

3章 フーリエ解析

1 フーリエ級数

まとめ

- **周期 2π の関数のフーリエ級数**

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

- **一般の周期関数のフーリエ級数**　$f(x)$ が周期 $2l$ の関数のとき

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

- **フーリエ余弦級数**　周期 $2l$ の関数 $f(x)$ が偶関数のとき

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$c_0=\frac{1}{l}\int_0^{l}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

- **フーリエ正弦級数**　周期 $2l$ の関数 $f(x)$ が奇関数のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

- **複素フーリエ級数**　$f(x)$ が周期 $2l$ の関数のとき

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}},\quad c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\,dx$$

- **フーリエ級数の収束定理**　周期関数 $f(x)$ が区分的に滑らかであるとき

$f(x)$ のフーリエ級数の和は　$\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

$f(x\pm 0)=\displaystyle\lim_{t\to x\pm 0}f(t)$

$f(x)$ が x で連続であれば，$f(x)$ のフーリエ級数の和は $f(x)$ に等しい．

Plus

1 曲率・曲率半径

66 $\kappa = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, $\rho = \dfrac{a^2+b^2}{a}$

2 主法線ベクトルと従法線ベクトル

67 $\boldsymbol{t} = \dfrac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(1+t^2,\ 2t,\ 1-t^2)$

$\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{1+t^2}(0,\ 1-t^2,\ -2t)$

3 速度ベクトルと加速度ベクトル

68 (1) $\boldsymbol{v} = (\cos t,\ 2\cos 2t,\ -3\sin 3t)$

$\boldsymbol{a} = (-\sin t,\ -4\sin 2t,\ -9\cos 3t)$

(2) $\boldsymbol{v} = (1,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{a} = (0, 0, -9)$ より

$a_t = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{v}}{v} = 0$

$a_n = |\boldsymbol{a} - a_t\boldsymbol{t}| = |\boldsymbol{a}| = 9$

69 $\boldsymbol{v} = (1,\ t,\ t^2)$, $\boldsymbol{a} = (0,\ 1,\ 2t)$ より

$t=1$ のとき

$\boldsymbol{t} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{v} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{a} = (0,\ 1,\ 2)$

以上より　$a_t = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t} = \sqrt{3}$

$a_n = |\boldsymbol{a} - a_t\boldsymbol{t}| = |(-1,\ 0,\ 1)| = \sqrt{2}$

4 いろいろな問題

70 スカラー場を φ とおくと，合成関数の微分法より

$\varphi_r = \sin v\cos u\,\varphi_x + \sin v\sin u\,\varphi_y + \cos v\,\varphi_z$　①

$\dfrac{1}{r}\varphi_v = \cos v\cos u\,\varphi_x + \cos v\sin u\,\varphi_y - \sin v\,\varphi_z$　②

$\dfrac{1}{r\sin v}\varphi_u = -\sin u\,\varphi_x + \cos u\,\varphi_y$　③

① × $\cos v$ − ② × $\sin v$ より

$\cos v\,\varphi_r - \dfrac{\sin v}{r}\varphi_v = \varphi_z$

① × $\sin v$ + ② × $\cos v$ より

$\sin v\,\varphi_r + \dfrac{\cos v}{r}\varphi_v = \cos u\,\varphi_x + \sin u\,\varphi_y$　④

また，④ × $\cos u$ − ③ × $\sin u$ より

$\sin v\cos u\,\varphi_r + \dfrac{\cos v\cos u}{r}\varphi_v - \dfrac{\sin u}{r\sin v}\varphi_u$

$= \varphi_x$

④ × $\sin u$ + ③ × $\cos u$ より

$\sin v\sin u\,\varphi_r + \dfrac{\cos v\sin u}{r}\varphi_v + \dfrac{\cos u}{r\sin v}\varphi_u$

$= \varphi_y$

以上より，∇ についての等式が得られる．

71 (1) 点 t における点 P の座標は

$\mathrm{P}(t) = (a\cos t,\ \sin t,\ -a\sin t)$

点 t における曲線 C の接線ベクトルは

$\mathrm{P}'(t) = (-a\sin t,\ \cos t,\ -a\cos t)$

$t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，順に $(0,\ 1,\ -a)$，$(-a,\ 0,\ 0)$

$t = \pi$ のとき，順に $(-a,\ 0,\ 0)$，$(0,\ -1,\ a)$

(2) t における接線は，媒介変数 s を用いると

$x = a\cos t + s(-a\sin t)$

$y = \sin t + s\cos t$

$z = -a\sin t + s(-a\cos t)$　　(s は実数)

(3) $z = -a\sin t = -ay$ より，曲線 C は平面上の曲線であり，その平面の方程式は　$ay + z = 0$

単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}(0,\ a,\ 1)$

(4) 曲線 C を zx 平面に投影した曲線の方程式は

$x = a\cos t,\ y = 0,\ z = -a\sin t$

$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

この曲線は半径 a の円だから　πa^2

72 (1) **0**

(2) $\boldsymbol{a} = \nabla\varphi$ より

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$　①

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -2xye^{-x^2-y^2}$　②

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z$　③

②を y について積分すると

$\varphi = xe^{-x^2-y^2} + f(x,\ z)$

(ただし，$f(x,\ z)$ は x と z の関数)

①に代入すると

$(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ となるから　$f(x,\ z) = g(z)$

(ただし，$g(z)$ は z だけの関数)

$\therefore\ \varphi = xe^{-x^2-y^2} + g(z)$

③に代入すると $g'(z) = 2z$

これから $g(z) = z^2 + c$　(ただし，c は定数)

$\therefore\ \varphi = xe^{-x^2-y^2} + z^2 + c$

原点において $\varphi = 0$ より

$\varphi = xe^{-x^2-y^2} + z^2$

φ は存在し，$\varphi = xe^{-x^2-y^2} + z^2$

(3) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{r}$

$= \varphi(\boldsymbol{r}(2\pi)) - \varphi(\boldsymbol{r}(0)) = 4\pi^2$

別解　C 上で

$\boldsymbol{a} = ((1-8\cos^2 t)e^{-4},\ (-8\cos t\sin t)e^{-4},\ 2t)$

また，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 1)$

$\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}(-2e^{-4}\sin t + 2t)\,dt$

$= 4\pi^2$

73 (1) $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} = (-r\sin u\cos v,\ r\cos u\cos v,\ 0)$

$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = (-r\cos u\sin v,\ -r\sin u\sin v,\ r\cos v)$

より

$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = (r^2\cos u\cos^2 v,$

$r^2\sin u\cos^2 v,\ r^2\cos v\sin v)$

$= r^2\cos v\,\boldsymbol{i}_r$

(2) 領域を D とすると

$\displaystyle\int_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_D \frac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r\cdot r^2\cos v\,\boldsymbol{i}_r\,dudv$

$\displaystyle = r\iint_D u^2\cos v|\boldsymbol{i}_r|^2\,dudv$

$\displaystyle = r\int_0^{2\pi}u^2\,du\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos v\,dv$

$= \dfrac{16}{3}\pi^3 r$

2 章 ラプラス変換

1 ラプラス変換の定義と性質

Basic

74 $\dfrac{6}{s^4}$　$(s>0)$

75 $\dfrac{2s^2+6}{s^3}$　$(s>0)$

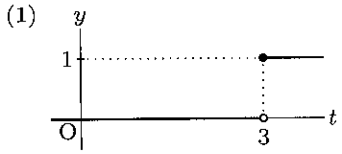
76 $\dfrac{3}{(s-1)(s+2)}$　$(s>1)$

77 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\sin 3t\,dt$ を計算せよ．$\dfrac{3}{s^2+9}$　$(s>0)$

78 $\cosh 2t = \dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}$ を用いよ．

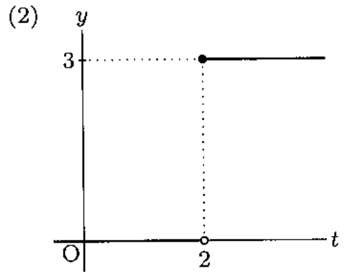
$\dfrac{s}{s^2-4}$　$(s>2)$

79 (1)



$\mathcal{L}[U(t-3)] = \dfrac{e^{-3s}}{s}$　$(s>0)$

(2)



$\mathcal{L}[3U(t-2)] = \dfrac{3e^{-2s}}{s}$　$(s>0)$

80 (1) $f(t) = U(t-1) - U(t-3)$　$(t>0)$

$\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{e^{-s}-e^{-3s}}{s}$　$(s>0)$

(2) $f(t) = 2U(t-1)$　$(t>0)$

$\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{2e^{-s}}{s}$　$(s>0)$

81 $\omega>0$ のときと $\omega<0$ のときに分けて求めよ．

$\omega<0$ のときは，$\cosh\omega t = \cosh(-\omega t)$ を用いよ．

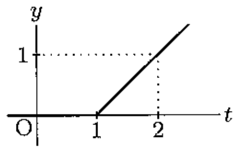
$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$

82 $\dfrac{1}{s^2+4}$

83 $\dfrac{6}{(s-2)^4}$

84 $\dfrac{se^{-\frac{\pi}{6}s}}{s^2+1}$

85



$\mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{e^{-s}}{s^2}$

86 $\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$, $\dfrac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$

87 $\dfrac{2}{s^3(s+4)}$

88 $\dfrac{n!}{(s-3)^{n+1}}$

89 $\log\dfrac{s+1}{s-3}$

90 (1) te^{-2t} (2) $\dfrac{1}{2}(e^{3t}-e^{t})$

(3) $e^{3t}\sin t$

91 (1) $(1-2t)e^{-3t}$

(2) $e^{2t}\left(\cos 3t+\dfrac{2}{3}\sin 3t\right)$

92 (1) $e^{-2t}-2e^{2t}+3e^{t}$

(2) $-1+t+e^{-t}$

Check

93 (1) $\dfrac{8-3s+2s^2}{s^3}$ (2) $\dfrac{6-6s+3s^2-s^3}{s^4}$

(3) $\dfrac{s+1}{(s-2)(s-3)}$ (4) $\dfrac{e^2}{s-3}$ ⇒74,75,76

94 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}(t\,e^{\alpha t})\,dt$ を計算せよ. $\dfrac{1}{(s-\alpha)^2}$ ⇒77

95 $\sinh\omega t=\dfrac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}$ を用いよ.

$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$ ⇒78

96 (1) $f(t)=U(t)-U(t-2)+U(t-3)$ $(t>0)$

$\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1-e^{-2s}+e^{-3s}}{s}$

(2) $f(t)=U(t)-U(t-1)+2U(t-3)$ $(t>0)$

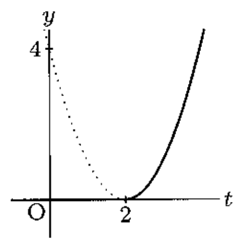
$\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1-e^{-s}+2e^{-3s}}{s}$ ⇒79,80

97 (1) $\dfrac{1}{(s-3)^2}$ (2) $\dfrac{2}{(s+2)^3}$

(3) $\dfrac{3}{(s-2)^2+9}$ (4) $\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

⇒83

98



$\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{2e^{-2s}}{s^3}$ ⇒84,85

99 $\dfrac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$, $\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$ ⇒86

100 $\dfrac{s^2+2}{(s+3)(s^2+1)}$ ⇒87

101 $\dfrac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}$ ⇒88

102 (1) $\dfrac{1}{6}t^3e^{2t}$ (2) $(1+3t)e^{t}$

(3) $\dfrac{1}{5}(3e^{3t}+2e^{-2t})$ (4) $2\cos 2t+\dfrac{3}{2}\sin 2t$

(5) $e^{-t}\left(2\cos 2t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$ ⇒90,91

103 (1) $-\dfrac{1}{2}e^{-t}+e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{3t}$

(2) $(3t+1)e^{2t}+e^{-3t}$ ⇒92

Step up

104 $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2(U(t)-U(t-2))$

$\qquad+\dfrac{1}{2}(t-4)^2(U(t-2)-U(t-4))$

$\qquad=\dfrac{1}{2}t^2\,U(t)-4(t-2)\,U(t-2)$

$\qquad-\dfrac{1}{2}(t-4)^2\,U(t-4)$

$\mathcal{L}[f(t)]=\dfrac{1-4se^{-2s}-e^{-4s}}{s^3}$

105 (1) $\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$

$$=\frac{(s^2+4)-4}{(s^2+4)^2}=\frac{1}{s^2+4}-\frac{4}{(s^2+4)^2}$$

$$=\frac{1}{s^2+4}-\frac{1}{2}\,\frac{(s^2+4)-(s^2-4)}{(s^2+4)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+4}+\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+4}+\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 2t+2t\cos 2t)$$

(2) $\dfrac{s^3-s^2+12s-18}{(s^2+9)^2}$

$$=\frac{(s-1)(s^2+9)+3s-9}{(s^2+9)^2}$$

$$=\frac{s-1}{s^2+9}+\frac{3s}{(s^2+9)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{(s^2+9)-(s^2-9)}{(s^2+9)^2}$$

$$=\frac{s}{s^2+9}-\frac{3}{2(s^2+9)}+\frac{s^2-9}{2(s^2+9)^2}+\frac{3s}{(s^2+9)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^3-s^2+12s-18}{(s^2+9)^2}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}-\frac{3}{2(s^2+9)}+\frac{s^2-9}{2(s^2+9)^2}+\frac{3s}{(s^2+9)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(2\cos 3t-\sin 3t+t\cos 3t+t\sin 3t)$$

2 ラプラス変換の応用

Basic

106 (1) $x=e^{2t}$ (2) $x=1-e^{-t}$

107 (1) $x=\dfrac{1}{3}e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{t}+\dfrac{1}{6}e^{-t}$

(2) $x=\dfrac{1}{2}e^{t}\sin 2t$

108 (1) $x=e^{2t}$

(2) $x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\cos 3t-\dfrac{1}{3}\sin 3t$

109 A, B は任意定数

(1) $x=\dfrac{1}{4}+Ae^{-4t}$ (2) $Ae^{3t}+Be^{-3t}$

(3) $x=\dfrac{t}{16}+A\cos 4t+B\sin 4t$

110 $\dfrac{1}{20}t^5$

111 $\dfrac{1}{20}t^5+\dfrac{1}{30}t^6$

112 $\dfrac{6}{s^6}$

113 (1) $\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)\,\tau\,e^{-2\tau}\,d\tau$

(2) $\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)\,(e^{4\tau}-e^{3\tau})\,d\tau$

(3) $\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^t f(t-\tau)e^{2\tau}\sin 3\tau\,d\tau$

114 (1) $x=2t+\dfrac{1}{3}t^3$

(2) $x=3\cos 3t-2\sin 3t$

115 $H(s)=\dfrac{1}{s^2-4s+3}$

$y(t)=\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^t (e^{3\tau}-e^{\tau})\,x(t-\tau)\,d\tau$

116 $\dfrac{1}{s-2}$

117 $y(t)=te^{-t}$ $(t>0)$

Check

118 (1) $x=\left(\dfrac{1}{2}t^2+1\right)e^{t}$

(2) $x=\dfrac{1}{4}t+\cos 2t+\dfrac{7}{8}\sin 2t$

(3) $x=(t+2)e^{3t}-e^{2t}$ ⇒106,107

119 (1) $x=\dfrac{1}{8}\cos t+\dfrac{7}{8}\cos 3t+\dfrac{1}{3}\sin 3t$

(2) $x=\dfrac{1}{8}\cos t+\dfrac{7}{8}\cos 3t+\dfrac{3}{4}\sin 3t$

(3) $x=\dfrac{1}{8}\cos t+A\cos 3t+B\sin 3t$

(A, B は任意定数) ⇒107,108,109

120 (1) $x=e^{-t}\left(\cos 2t+\dfrac{3}{2}\sin 2t\right)$

(2) $x=e^{-t}\cos 2t$

(3) $x=e^{-t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$

(A, B は任意定数) ⇒107,108,109

121 (1) $\dfrac{1}{2}(t\cos t+\sin t)$ (2) $\dfrac{1}{4}e^{2t}-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}$

(3) $2\cos t+t^2-2$ ⇒110,111,112

122 (1) $x=2\cos 2t$ (2) $x=te^{t}$

(3) $x=\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{6}t^4$ ⇒114

123 $H(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$

$y(t)=\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^t x(t-\tau)\,\sin 2\tau\,d\tau$ ⇒115

124 $y(t)=\dfrac{1}{5}(e^{2t}-e^{-3t})$ $(t>0)$ ⇒117

Step up

125 (1) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$\left(s^2X(s) - s - 1\right) - 2\left(sX(s) - 1\right) + X(s) = \frac{s}{s^2-1}$$

$$X(s) = \frac{s}{(s-1)^3(s+1)} + \frac{1}{s-1}$$
$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}$$

よって　$x(t) = \frac{1}{8}e^t(7 + 2t + 2t^2) + \frac{1}{8}e^{-t}$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$\left(s^2X(s) - 1\right) - 2sX(s) + 5X(s) = \frac{1}{(s-1)^2+1}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)^2+4}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{(s-1)^2+4}\right) + \frac{1}{(s-1)^2+4}$$

よって　$x(t) = \frac{1}{3}e^t(\sin t + \sin 2t)$

(3) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$\left(s^3X(s) - s^2 + 2\right) + 3\left(s^2X(s) - s\right) + 3\left(sX(s) - 1\right) + X(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^3}\left(s^2 + 3s + 1 + \frac{2}{(s+1)^3}\right)$$
$$= \frac{(s+1)^2 + (s+1) - 1}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^6}$$

よって　$x(t) = e^{-t}\left(1 + t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{60}t^5\right)$

126 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$sX(s) - x(0) + 2X(s) - \frac{3X(s)}{s} = \frac{1}{s^2}$$
$$(s^3 + 2s^2 - 3s)X(s) = 1 - s^2$$
$$s(s-1)(s+3)X(s) = -(s-1)(s+1)$$
$$X(s) = -\frac{s+1}{s(s+3)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s+3}\right)$$

よって　$x(t) = -\frac{1}{3}(1 + 2e^{-3t})$

127 (1) $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換を求めると，例題より

$$s^2Y(s) + \omega^2Y(s) = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$
$$Y(s) = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s(s^2+\omega^2)}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)\right] = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\varepsilon s}}{s(s^2+\omega^2)}\right] = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\omega(t-\varepsilon))\,U(t-\varepsilon)$$

よって　$y_\varepsilon(t)$
$$= \frac{1 - \cos\omega t - (1 - \cos\omega(t-\varepsilon))\,U(t-\varepsilon)}{\omega^2\varepsilon}$$

(2) $0 < \varepsilon < t$ のとき　$U(t-\varepsilon) = 1$

$$y_\varepsilon(t) = \frac{1 - \cos\omega t - (1 - \cos\omega(t-\varepsilon))}{\omega^2\varepsilon} = \frac{-\cos\omega t + \cos\omega(t-\varepsilon)}{\omega^2\varepsilon}$$

ロピタルの定理より

$$\lim_{\varepsilon\to+0} y_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\omega\sin\omega(t-\varepsilon)}{\omega^2} = \frac{1}{\omega}\sin\omega t$$

128 (1) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$sX(s) - 2 = X(s) - 2Y(s),\ sY(s) = -3X(s)$$

$Y(s)$ を消去して $X(s)$ を求めると

$$X(s) = \frac{2s}{(s-3)(s+2)} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{s-3} + \frac{2}{s+2}\right)$$

よって

$$x(t) = \frac{2(3e^{3t} + 2e^{-2t})}{5}$$
$$y(t) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{dx}{dt}\right) = \frac{6(e^{-2t} - e^{3t})}{5}$$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$，$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$sX(s) - 1 = -2X(s) + Y(s) - \frac{1}{s-2}$$
$$sY(s) - 1 = X(s) - 2Y(s) + \frac{1}{s-2}$$

$Y(s)$ を消去して $X(s)$ を求めると

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s-2)(s+3)}$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3}\right)$$

よって

$$x(t) = e^{-t} - \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t}$$
$$y(t) = 2x + \frac{dx}{dt} + e^{2t} = e^{-t} + \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t}$$

129 (1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]$

$$= \frac{1}{3}\sin 3t * \cos 3t$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^t \sin 3(t-\tau)\,\cos 3\tau\,d\tau$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^t \{\sin 3t + \sin(3t - 6\tau)\}\,d\tau$$
$$= \frac{1}{6}t\sin 3t$$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]$

$$= \cos 2t * \cos 2t$$
$$= \int_0^t \cos 2(t-\tau)\,\cos 2\tau\,d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \{\cos 2t + \cos(2t - 4\tau)\}\,d\tau$$
$$= \frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$$

130 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+5}\right]$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2+4}\right] = \frac{1}{2}e^t\sin 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha(s-2)+\beta}{s^2-2s+5}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\alpha(s-1) - \alpha + \beta}{(s-1)^2+4}\right]$$
$$= \alpha e^t\cos 2t + \frac{\beta-\alpha}{2}e^t\sin 2t$$

よって

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}e^t\sin 2t\right) * x(t) + \left(\alpha e^t\cos 2t + \frac{\beta-\alpha}{2}e^t\sin 2t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t x(t-\tau)\,e^\tau\sin 2\tau\,d\tau + \alpha e^t\cos 2t + \frac{\beta-\alpha}{2}e^t\sin 2t$$

Plus

131 (1) $\frac{15\sqrt{\pi}}{8s^3\sqrt{s}}$　(2) $\frac{(3+4s^2)\sqrt{\pi}}{4s^2\sqrt{s}}$

132 (1) $\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$　(2) $\frac{4t\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}}$

133 最初の 1 周期分を取り出した関数を $\varphi(t)$ とすると

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \int_0^a e^{-st}\cdot 1\,dt = \frac{1 - e^{-as}}{s}$$
$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\mathcal{L}[\varphi(t)]}{1 - e^{-2as}} = \frac{1}{s(1 + e^{-as})}$$

134 最初の 1 周期分を取り出した関数を $\varphi(t)$ とすると

$$\mathcal{L}[\varphi(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$
$$\mathcal{L}[\delta_T(t)] = \frac{\mathcal{L}[\varphi(t)]}{1 - e^{-Ts}} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

135 (1) $(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[\sin 2t]$

$$= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{4(3s^2-4)}{(s^2+4)^3}$$

(2) $s\mathcal{L}[t^2\sin 2t] - (t^2\sin 2t)_{t=0} = \frac{4s(3s^2-4)}{(s^2+4)^3}$

(3) $s^2\mathcal{L}[t^2\sin 2t] - (t^2\sin 2t)_{t=0}\,s - (t^2\sin 2t)'_{t=0}$

$$= \frac{4s^3(3s^2-4)}{(s^2+4)^3}$$

(4) $\frac{1}{s}\mathcal{L}[t\sin t] = \frac{2}{(s^2+1)^2}$

(5) $\frac{1}{s}\mathcal{L}[e^t\cos t] = \frac{s-1}{s(s^2-2s+2)}$

(6) $\mathcal{L}[\sin 5t] = \frac{5}{s^2+5^2}$ より

$$\int_s^\infty \frac{5}{\sigma^2+5^2}\,d\sigma = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{5}$$

136 (1) 両辺に $(s+1)^2(s^2-2s+2)$ を掛けると

$$4s^2 + s + 12 = A(s+1)(s^2-2s+2) + B(s^2-2s+2) + (Cs+D)(s+1)^2$$
$$= (A+C)s^3 + (-A+B+2C+D)s^2 + (-2B+C+2D)s + (2A+2B+D)$$

各係数を比較せよ．

$A = 1,\ B = 3,\ C = -1,\ D = 4$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{-s+4}{s^2-2s+2}\right]$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} - \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{3}{(s-1)^2+1}\right]$$
$$= (1+3t)e^{-t} + e^t(3\sin t - \cos t)$$

137 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ として，方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$sX(s) + 3X(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$
$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s+3}\right)$$

よって

$$x(t) = \frac{1}{3}\left\{U(t-2) - e^{-3(t-2)}\,U(t-2)\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(1 - e^{-3t+6})\,U(t-2)$$

138 $\mathcal{L}[i(t)] = I(s)$ とおく.

(1) 方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$LsI(s) + RI(s) = 1 \qquad \therefore\ I(s) = \frac{1}{Ls+R}$$

よって $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{Ls+R}\right] = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$

(2) 方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{E}{s}$$
$$I(s) = \frac{E}{s(Ls+R)} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{L}{Ls+R}\right)$$

よって $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

(3) 方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$LsI(s) + RI(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$I(s) = \frac{\omega}{(Ls+R)(s^2+\omega^2)}$$
$$= \frac{\omega}{R^2+\omega^2L^2}\left(\frac{L^2}{Ls+R} - \frac{Ls-R}{s^2+\omega^2}\right)$$
$$= \frac{\omega}{R^2+\omega^2L^2}\left(L\cdot\frac{1}{s+\frac{R}{L}} - L\,\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{R}{\omega}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)$$

よって

$$i(t) = \frac{1}{R^2+\omega^2L^2}\left(\omega Le^{-\frac{R}{L}t} - \omega L\cos\omega t + R\sin\omega t\right)$$

139 (1) $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s),\ \mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s)$

(2) $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)] = -F'(s)$

$$\mathcal{L}[tf'(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f'(t)] = -F(s) - sF'(s)$$
$$\mathcal{L}[tf''(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f''(t)]$$
$$= -2sF(s) - s^2F'(s)$$

(3) 方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$-2sF(s) - s^2F'(s) - 3(F(s) + sF'(s)) - sF(s) - 2F'(s) - 3F(s) = 0$$
$$(s+1)(s+2)F'(s) + 3(s+2)F(s) = 0$$

よって $(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$

(4) (3) の変数分離形微分方程式を解くと

$$F(s) = \frac{c}{(s+1)^3} \quad (c \text{ は任意定数})$$
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{c}{2}t^2e^{-t} = Ct^2e^{-t}$$

(C は任意定数)

3章 フーリエ解析

1 フーリエ級数

Basic

140 $0\ (m \neq n),\ 1\ (m = n)$

141 $-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$

142 (1) $\frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x$

(2) $\frac{9}{4} - 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3} + \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)$

143 (1) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$

(2) $\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi x$

144 フーリエ級数に $x = 0$ を代入し，フーリエ級数の収束定理を用いよ.

145 $1 + \frac{i}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\,e^{in\pi x}$

146 $1 - \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\,e^{i\frac{n\pi x}{2}}$

Check

147 (1) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$

(2) $\frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$

(3) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$

⇒141,142,143

148 フーリエ級数に $x = \frac{\pi}{2}$ を代入し，フーリエ級数の収束定理を用いよ. ⇒144

149 (1) $1 + \frac{2i}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{in\pi x}$

(2) $-\frac{i}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}e^{i\frac{n\pi x}{3}}$ ⇒145,146

Step up

150 周期 2 の奇関数ならば，右辺の級数で表すことができる. $f(x) = x\ (-1 \leqq x < 1),\ f(x+2) = f(x)$ とすると，$f(x)$ は周期 2 の奇関数となり，$0 \leqq x < 1$ の範囲で $f(x) = x$ が成り立つ.

$f(x)$ のフーリエ係数を求める.

$$c_n = b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\sin n\pi x\,dx$$
$$= 2\int_0^1 x\,\sin n\pi x\,dx$$
$$= 2\left[\frac{-x}{n\pi}\,\cos n\pi x\right]_0^1 + 2\int_0^1\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\,dx$$
$$= \frac{-2\cos n\pi}{n\pi} + \left[\frac{2\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^1 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

151 $f(x)$ は周期 $2N$ の偶関数だから $b_n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{N}\int_0^N f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{N}\int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2N}$$
$$a_n = \frac{2}{N}\int_0^N f(x)\cos\frac{n\pi x}{N}\,dx$$
$$= \frac{2}{N}\int_0^1 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{N}\,dx$$
$$= \frac{2}{N}\left\{\left[(1-x)\cdot\frac{N}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{N}\right]_0^1 + \frac{N}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{N}\,dx\right\}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{N}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{N}\right]_0^1$$
$$= \frac{2N}{n^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{N}\right)$$
$$f_N(x) = \frac{1}{2N} + \frac{2N}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{N}}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{N}$$

$u_n = \frac{n\pi}{N},\ \Delta u_n = u_n - u_{n-1} = \frac{\pi}{N}$ とおくと

$$f_N(x) = \frac{1}{2N} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1-\cos u_n}{u_n^2}\cos u_n x\,\Delta u_n$$

よって

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos u}{u^2}\cos ux\,du$$

2 フーリエ変換

Basic

152 $\frac{1-iu}{1+u^2}$

153 (1) $\frac{2(1-e^{3iu})i}{u}$ (2) $\frac{(1+iu)e^{-iu}-1}{u^2}$

154 (1) $x = 0$ で不連続であることに注意して，フーリエの積分定理を適用せよ.

(2) (1) の $x = 0$ のときの等式の両辺の実部を比較せよ.

155 $\frac{2(u-\sin u)}{u^2}$

156 $\mathcal{F}[f(ax)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\,e^{-iux}dx$ より，$t = ax$ とおいて置換積分を行え. $a < 0$ の場合，$x : -\infty \to \infty$ のとき，$t : \infty \to -\infty$ となることに注意せよ.

157 $\frac{2(1-e^{3iu})\big((1+iu)e^{-iu}-1\big)i}{u^3}$

158 (1) $2\sqrt{\pi}\,e^{-u^2}$ (2) $-4\sqrt{\pi}\,iue^{-u^2}$

(3) $4\sqrt{\pi}(1-2u^2)e^{-u^2}$

159 $\frac{1}{2\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{x^2}{12}}$

160 (1) 導関数のフーリエ変換の性質とたたみこみのフーリエ変換を用いよ.

(2) 導関数のフーリエ変換の性質を用いて右辺をフーリエ変換し，(1) の右辺と比較せよ.

161
$$S_f(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (\omega = 0) \\ -\frac{4}{\omega^2} & (\omega = (2k-1)\pi) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ただし，$k = 1,\ 2,\ \cdots$

162
$$S_f(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & (\omega = 0) \\ \frac{2(\omega\sin\omega + \cos\omega - 1)}{\pi\omega^2} & (\omega > 0) \end{cases}$$