

$$\tilde{x}_N(t) - x(t) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \{x(t+s) - x(t)\} \left(\frac{\sin \frac{Ns}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2 ds$$

$x(t)$ が $[-\pi, \pi]$ で連続であれば一様連続ですから, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, t と無関係に, $|s| < \delta$ のとき, $|x(t+s) - x(t)| < \epsilon/2$ となるような $\delta > 0$ が取れます。 ϵ を十分小さく取って, このように定めたところで, 式 (4.3) の右辺の積分を以下のように三つに分割します。

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} = \text{I} + \text{II} + \text{III}$$

$x(t)$ の $[-\pi, \pi]$ における最大値を M とすると

$$|\text{I} + \text{III}| \leq \frac{2M}{2\pi N} \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta} \left(\frac{\sin \frac{Ns}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2 ds + \int_{\delta}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{Ns}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2 ds \right\}$$